ÁLLAPOTBECSLÉS ÉS ÁLLAPOTVISSZACSATOLÁS KVÁZIPOLINOMIÁLIS ÉS KVANTUMMECHANIKAI RENDSZEREKRE

doktori (PhD) értekezés tézisei

készítette
MAGYAR ATTILA

Témavezető: Dr Hangos Katalin

Informatika Tudományok Doktori Iskola

Számítástudomány Alkalmazása Tanszék
Pannon Egyetem
Veszprém

MTA SzTAKI
Rendszer és Irányításelméleti Kutatólaboratórium
Budapest

2007

1. Célkitűzés, motiváció

A rendszer- és irányításelmélet állapottér alapú módszereit [1], [2], [3], [4] manapság olyan területeken használják, mint a robusztus, LPV, és LQ irányítás. Ezen kívül az állapottér alapú technikák olyan nehezen kezelhető rendszerekre is alkalmazhatóak, mint a folyamatrendszerek, nukleáris rendszerek, stb. Másrészről, széles működési tartománnyal rendelkező erősen nemlineáris rendszerekre, mint a biomechanikai, biokémiai, vagy kvantum rendszerek, jelenleg sincsenek jól alkalmazható technikák, bár komoly fejlődés tapasztalható a nemlineáris és sztochasztikus rendszer- és irányításelmélet területén (pl. [1],[3]).

A dolgozatban két - a fizika különböző területeiről származó speciális rendszerosztályon alkalmaztam a modern irányításelmélet eszközeit. Kihasználva a rendszerosztályok speciális tulajdonságait, sikerült gyakorlatilag megvalósítható módszereket adnom olyan problémákra, amelyek az általános esetben nehéznek, illetve számításigényesnek bizonyultak.

A folyamatrendszerek [5] globális stabilitásvizsgálatát nemlineáris jellegük teszi nehéz feladattá. Olyan speciális nemlineáris rendszermodell osztályok alkalmazása, melyek elég általánosak a folyamatrendszerek dinamikus viselkedésének leírására, megkönnyítené ezen rendszerek analízosét, és irányítását is. Ebben a dolgozatban az úgynevezett kvázipolinomiális (QP) rendszerosztályt [6] [7] alkalmaztam a fenti célokra. Kihasználva, hogy QP rendszerekre a Ljapunov függvény alakja ismert, leegyszerűsödik az általános folyamatrendszerek globális stabilitásvizsgálata, valamint a kvázipolinomiális rendszerosztály segítségével olyan szabályozótervezési feladat is felírható, amely biztosítja a zárt rendszer globális stabilitását egy adott Ljapunov függvény családra nézve [8]. A probléma további specialitása, hogy folyamatrendszerek esetén az állapotváltozók tipikusan koncentrációk, nyomások, stb. amelyek mind mérhető mennyiségek, tehát az állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozótervezéshez nem kell állapot megfigyelőt, illetve szűrőt tervezni. Emellett az állapotok pozitív mennyiségek, tehát a kvázipolinomiális formában felírt folyamatrendszerek a pozitív rendszerek egy speciális alosztályát alkotják.

Mindezidáig csupán néhány szerző (pl. [9]) próbálta meg a kvantummechanikai rendszereket rendszerelméleti oldalról megközelíteni. A dolgozatban kitűzött probléma kvantuminformáció kiolvasásával kapcsolatos, ami irányításelméleti szempontból megfigyelő-, illetve becslőtervezési problémát jelent. Mivel a kvantummechanikában a mérés egy valószínűségi jellegű művelet, ami a teljes rendszert sztochasztikussá teszi, ezért a megoldandó feladat az állapotbecslés [10] egy speciális formája. Az egyik út a bayesi módszertan alkalmazása, amely egy teljes valószínűségi modellt használ, és az ez alapján számolt becslő sok statisztikai információval szolgál a kérdéses állapotról. A másik irányt egy egyszerű pontbecslő kifejlesztése jelenti, amely a kvantumrendszerek egy szélesebb osztályára alkalmazható, továbbá a számításigénye nem túl nagy.

2. Felhasznált eszközök és módszerek

A következőkben a dolgozatban használt alapfogalmak és fontosabb eszközöket foglalom össze.

2.1. Kvázipolinom és Lotka-Volterra modellek

A kvázipolinomiális rendszerek olyan hagyományos differenciálegyenlet rendszerek, amelyek az alábbi alakban adottak

$$\dot{x}_i = x_i \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^{m} A_{i,j} \prod_{k=1}^{n} x_k^{B_{j,k}} \right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

ahol $x \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Továbbá $\lambda = [\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_n]^T$. Bizonyított [6], hogy nem QP alakú, *sima* nemlineáris rendszerek könnyedén beágyazhatók QP alakba oly módon, hogy a nem kázpolinomiális nemlinearitások helyett új állapotváltózók kerülnek bevezetésre.

Az $M = B \cdot A$ és $N = B \cdot \lambda$ szorzatok alapján a QP rendszerek családja ekvivalencia osztályokra bontható [7]. Az egyes partíciók reprezentatív elemei *Lotka-Volterra* alakú rendszerek. Ha $rank(B) = n$, akkor az (1) differenciálegyenletrendszer beágyazható az alábbi m dimenziós Lotka-Volterra modellbe:

$$\dot{z}_j = z_j \left(N_j + \sum_{i=1}^{m} M_{j,i} z_i \right), \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

ahol

$$M = B \cdot A, \quad N = B \cdot \lambda,$$

és minden z_j egy ún. *kvázimonom*:

$$z_j = \prod_{k=1}^{n} x_k^{B_{j,k}}, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

A továbbiakban jelölje x^* a QP rendszer pozitív egyensúlyi pontot, azaz $x^* \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$, és $z^* \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^m_+)$ a LV rendszer pozitív egyensúlyi pontja. Lotka-Volterra rendszerekhez ismert a következő Ljapunov függvény család [8],[11]:

$$V(z) = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(z_i - z_i^* - z_i^* \ln \frac{z_i}{z_i^*} \right), \tag{4}$$

$$c_i > 0, \quad i = 1 \dots m,$$

ahol $z^* = [z_1^*, \dots, z_m^*]^T$ az (1) rendszer x^* egyensúlyi pontjához tartozó egyensúlyi pont. A (4) Ljapunov függvény idő szerinti deriváltja

$$\dot{V}(z) = \frac{1}{2}(z - z^*)(CM + M^T C)(z - z^*), \tag{5}$$

ahol $C = \mathrm{diag}(c_1, \dots, c_m)$ és M az (2) LV rendszert karakterizáló mátrix invariáns.

2.2. Input-affin QP rendszerek

A p bemenettel rendelkező input-affin QP rendszerek állapotegyenletének általános alakja:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i \left(\lambda_{0_i} + \sum_{j=1}^{m} A_{0_{i,j}} \prod_{k=1}^{n} x_k^{B_{j,k}} \right) + \\ &\quad + \sum_{l=1}^{p} x_i \left(\lambda_{l_i} + \sum_{j=1}^{m} A_{l_{i,j}} \prod_{k=1}^{n} x_k^{B_{j,k}} \right) u_l, \end{aligned} \tag{6}$$

ahol

$$i = 1, \dots, n, \quad A_0, A_l \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad B \in \mathbb{R}^{m \times n},$$
$$\lambda_0, \lambda_l \in \mathbb{R}^n, \quad l = 1, \dots, p.$$

A hozzátartozó input-affin Lotka-Volterra modell pedig a következő alakú

$$\dot{z}_j = z_j \left(N_{0_j} + \sum_{k=1}^{m} M_{0_{j,k}} z_k \right) + \sum_{l=1}^{p} z_j \left(N_{l_j} + \sum_{k=1}^{m} M_{l_{j,k}} z_k \right) u_l, \tag{7}$$

ahol

$$j = 1, \dots, m, \quad M_0, M_l \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad N_0, N_l \in \mathbb{R}^m, \quad l = 1, \dots, p,$$

és a fenti paraméterek az alábbi formulák segítségével kaphatók az input-affin QP rendszer paramétereiből

$$\begin{aligned} M_0 &= B \cdot A_0 \\ N_0 &= B \cdot L_0 \\ M_l &= B \cdot A_l \\ N_l &= B \cdot \lambda_l \qquad l = 1, \ldots, p. \end{aligned} \tag{8}$$

Ha a (6) rendszerre adott inputok az állapotváltozók kvázipolinomiális függvényei, akkor könnyű látni, hogy a zárt rendszer ugyancsak QP alakú lenne.

2.3. Idő-átparaméterezés transzformáció

Legyen $\omega = [\omega_1 \ \ \ldots \ \ \omega_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Belátható, (lásd [11]) hogy a következő transzformáció

$$dt = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\omega_k} dt' \tag{9}$$

áttranszformálja az eredeti QP rendszert a következő (ugyancsak kvázipolinomiális) alakba

$$\frac{dx_i}{dt'} = x_i \sum_{j=1}^{m+1} \tilde{A}_{i,j} \prod_{k=1}^{n} x_k^{\tilde{B}_{j,k}}, \ i = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

ahol $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times (m+1)}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n}$ és

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j}, \ \ i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m \tag{11}$$

$$\tilde{A}_{i,m+1} = \lambda_i, \ \ i = 1, \ldots, n \tag{12}$$

és

$$\tilde{B}_{i,j} = B_{i,j} + \omega_j, \ \ i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n \tag{13}$$

$$\tilde{B}_{m+1,j} = \omega_j, \ \ j = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Látható, hogy a kvázimonomok száma eggyel növekedett, és a transzformált rendszerben a $\tilde{\lambda}$ vektor zérus.

2.4. Lineáris és bilineáris mátrixegyenlőtlenségek

Egy (nem szigorú) lineáris mátrixegyenlőtlenség (LMI) a következő alakú egyenlőtlenség

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \leq 0, \tag{15}$$

ahol $x \in \mathbb{R}^m$ a vektor-változó, és $F_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = 0,\dots,m$ adott szimmetrikus mátrixok. Az egyenlőtlenségjel (15)-ben $F(x)$ negatív szemidefinitségét jelenti. Ha az egyenlőség nem megengedett, akkor *szigorú* az LMI.

Az LMI-k egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy egy konvex korlátozást jelentenek a változóra nézve, azaz a $\mathscr{F} = \{x \mid F(x) \leq 0\}$ halmaz konvex, és számos más konvex halmaz leírható lineáris mátrixegyenlőtlenség segítségével [12], [13] .

Fontos megjegyezni, hogy a konvex $\mathscr{F}$ halmaz valamely pontjának kiválasztása egy további kritérium alapján történik (pl. különféle célfüggvények segítségével) [12]. Alapvető LMI optimalizálási problémák a lineáris célfüggvény minimalizálása, általánosított sajátértékprobléma stb.

A rendszer- és irányításelmélet számos problémája átfogalmazható lineáris mátrixegyenlőtlenségekké. Jó példa erre a lineáris időinvariáns rendszerek aszimptotikus stabilitásával kapcsolatos Ljapunov egyenlet, de a *lineáris, változó paraméterű* rendszerekkel kapcsolatban is megjelennek, vagy μ-analízisbeli tervezési feladat is LMI-k megoldásával jár [14].

A következő tárgyalt eszköz, a bilineáris mátrixegyenlőtlenség (BMI), ami a következő alakú mátrixegyenlőtlenség

$$G_0^i + \sum_{k=1}^{p} x_k G_k^i + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} x_k x_j K_{kj}^i \leq 0, \quad i = 1,\dots,q, \tag{16}$$

ahol $x \in \mathbb{R}^p$ a vektor-változó G_k^i, $k = 0,\dots,p$, $i = 1,\dots,q$ és K_{kj}^i, $k, j = 1,\dots,p$, $i = 1,\dots,q$ szimmetrikus négyzetes mátrixok.

A fenti BMI fontos tulajdonsága, hogy x-ben nem konvex (ami numerikus szempontból sokkal nehezebbé teszi megoldásukat az LMI-knél), és a megoldásuk NP-nehéz feladat [15], tehát a kezelhető feladatok mérete korlátozott. Hasonlóan az LMI-khez, a megoldásként kapott halmazból egy további kritérium alapján választható ki valamely pont.

2.5. *N* szintű kvantumrendszerek állapotai

Végesdimenziós kvantumrendszerek állapotainak leírására úgynevezett *sűrűségmátrixok* használhatók. Egy χ sűrűségmátrix felfogható a $\mathscr{H}$ Hilbert téren ható statisztikai operárorként, mint egy pozitív szemidefinit, önadjungált, egy nyomú mátrix:

$$\chi \in \mathbb{C}^n, \quad \chi \geq 0, \quad \chi = \chi^*, \quad \mathrm{Tr}\chi = 1. \tag{17}$$

A sűrűségmátrix egy tiszta állapotnak felel meg, ha egyrangú projekció, azaz

$$\chi = \chi^2.$$

Kétszintű kvantumrendszerek (a Hilbert tér dimenziója 2) a *qubit* elnevezés használatos, mivel ezek tekinthetők a klasszikus bitek kvantum általánosításának. A Pauli mátrixokat, mint bázist használva a 2×2-es sűrűségmátrixok között, a következő, ún. Bloch vektor reprezentáció használható kvantum bitek állapotának leírására:

$$\chi = \frac{1}{2}(I + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3), \tag{18}$$

ahol σ_1, σ_2 és σ_3 az úgynevezett *Pauli mátrixok* [16], $x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3$. Ezáltal a qubit χ által leírt állapota tekinthető egy $\mathbb{R}^3$-beli $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ vektornak. A sűrűségmátrixra vonatkozó pozitivitási feltétel a Bloch vektoros jelölésben a $||x|| \leq 1$ feltételnek felel meg.

Egy általánosabb, tetszőleges kvantumrendszer leírására alkalmas parametrizációt ad az alábbi formula, mely a mátrix elemeit használja paraméterekként:

$$\chi = \sum_{k=1}^{N} x_{kk}E_{kk} + \sum_{i<j} \left(x_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + x_{ji}(iE_{ij} - iE_{ji}) \right), \tag{19}$$

ahol E_{ij}-k a mátrixegységek (nullmátrix, amelyben az i, j-edik elem egyes). Ily módon egy N szintű rendszer állapota leírható N^2 valós paraméterrel. Látható, hogy ellentétben a Bloch parametrizációval (18) ez a paraméterezés nem biztosítja az egységnyi nyomot. Ezért a következő kiegészítést célszerű alkalmazni:

$$\begin{aligned} \chi = \sum_{k=1}^{N-1} x_{kk}E_{kk} + \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} x_{kk} \right) E_{NN} + \\ + \sum_{i<j} \left(x_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) + x_{ji}(iE_{ij} - iE_{ji}) \right). \end{aligned} \tag{20}$$

Így bizonyos értelemben a Bloch vektor általánosítását kapjuk [17]. Egy N szintű kvantumrendszer állapotát leíró Bloch vektor az $\mathbb{R}^{N^2-1}$ tér eleme.

2.6. Kvantum mérés

Kvantummechanikában a mérhető mennyiségek (úgynevezett *obszervábilisok*) $\mathscr{H}$-beli önadjungált operátorokkal reprezentálhatók, azaz önadjungált, $\mathbb{C}^{\dim\mathscr{H} \times \dim\mathscr{H}}$-beli mátrixokkal írhatók le [18].

Egy O obszervábilis megmérése valószínűségi jellegű. A mérés különböző lehetséges *kimenetelei* az O operátor különböző sajátértékeinek felel meg, a valószínűségek pedig

$$\text{Prob}(\lambda_i) = \text{Tr}E_i\chi E_i^*,$$

ahol E_i a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor által kifeszített altérre vetítő projekció, azaz

$$\sum_i E_i = I, \quad E_i^2 = E_i.$$

Továbbá az **S** rendszer állapota megváltozik O megmérése után, és az új állapot, feltéve, hogy λ_i a mérés eredménye

$$\chi' = \frac{E_i\chi E_i^*}{\text{Tr}E_i\chi E_i^*}.$$

Ez azt jelenti, hogy ellentétben a klasszikus fizikával, a mérés jelen esetben nem egy passzív művelet, hanem *megváltoztatja a kvantumrendszer aktuális állapotát*.

A fent leírt mérés az ún. *Neumann-féle mérés*, aminek a leggyakrabban használt példája kétszintű rendszer esetén a spin mérése.

A kvantum mérés egyik általánosabb fajtája a pozitív operátor értékű mérés (POVM), lásd [19].

3. Új tudományos eredmények

A dolgozatban leírt tudományos hozzájárulást az alábbi négy tézispontban fogalmaztam meg.

1. Tézis *Kvázipolinom reprezentációban adott nemlineáris folyamatrendszerek globális stabilitásvizsgálatát egy lineáris mátrixegyenlőtlenséggé fogalmaztam át. A globális stabilitás bizonyításának esélyét megnöveltem az időátparaméterezés transzformációval. A transzformációban szereplő skálázótényezők meghatározása és a globális stabilitás bizonyítása egy bilineáris mátrixegyenlőtlenség megoldásával ekvivalens.*

([**O1**], [**O2**], [**O3**], [**O4**])

Beláttam, hogy QP, LV rendszerek esetén a Ljapunov függvény deriváltjának negativitása ekvivalens egy lineáris mátrixegyenlőtlenséggel, tehát QP- és LV rendszerek (és QP alakba ágyazott általános nemlineáris folyamatrendszerek) stabilitásvizsgálata felírható egy LMI megoldhatósági problémaként [13]. Amennyiben a modell beágyazott rendszerhez tartozik, az LMI nem szigorú.

Megmutattam, hogy az időátparaméterezés transzformáció átskálázza a QP rendszer kvázimonomjait, ennélfogva a transzformált és az eredeti rendszer globális stabilitása ekvivalens. Ily módon a globális stabilitásvizsgálatot kiterjesztettem a QP rendszerek egy szélesebb osztályára azáltal, hogy az időátparaméterezés transzformáció paramétereit beágyaztam a globális stabilitásvizsgálat mátrixegyenlőtlenségébe. A kapott probléma egy bilineáris mátrixegyenlőtlenség.

2. Tézis *A QP rendszerek globálisan stabilizáló kvázipolinomiális állapot-visszacsatolási problémáját felírtam egy bilineáris mátrixegyenlőtlenség formájában. Ezután átfogalmaztam olyan alakba, hogy megoldható legyen egy már létező iteratív LMI algoritmus segítségével.*

Egy lineáris egyenlőségrendszer megoldásával egy kiegészítő szabályozó tervezhetőségét mutattam meg, amely a zárt rendszer egyensúlyi pontjának koordinátáit tolja el. Feltételt adtam az eltolható koordinátákra vonatkozóan.

([**O5**], [**O11**])

Az **1. Tézis** eredményei alapján egy globálisan stabilizáló állapotvisszacsatolás problémát fogalmaztam meg. A feladat megoldása egy bilineáris mátrixegyenlőtlenség megoldhatósági problémájára vezet, ahol az egyik változócsoport a Ljapunov függvény paramétereit tartalmazza, a másik pedig a visszacsatolás paramétereit. A felírt megoldás nem használ költségfüggvényt a BMI, mint optimalizálási probléma megoldása során; ez egy lehetséges továbbfejlesztési pont, ahol performancia, illetve robusztussági kritériumok írhatók fel költségfüggvényként. Arra az esetre, ha a feladat csak a megoldhatósági probléma megoldása (költségfüggvény minimalizálás nélkül), átírtam a problémát olyan alakra, hogy egy az irodalomban létező iteratív LMI algoritmussal megoldható legyen.

Mivel a stabilizáló visszacsatolás eltolja a zárt rendszer egyensúlyi pontját, módszert adtam egy kiegészítő visszacsatolás tervezésére, amely (esetenként részlegesen) visszatolja az egyensúlyi pontot a kívánt értékbe. Megmutattam, hogy a Lotka-Volterra rendszert reprezentáló mátrix tulajdonságai alapján eldönthető, hogy tervezhető-e ilyen szabályozó, melynek paraméterei egy lineáris egyenletrendszer megoldásaként kaphatóak. Sajnos azonban a legtöbb esetben az egyensúlyi pontnak csak néhány koordinátája tolható el szabadon.

3. Tézis *Egy Bayes állapotbecslési módszert fejlesztettem ki, amely kvantumbitek Bloch parametrizációján alapul. Az alapul szolgáló mérési eredményeket a háromirányú Pauli spin Neumann-féle méréséből szereztem. A mérések függetlensége miatt a feladat komponensenként megoldható.*
A fizikai jelentéssel nem bíró eredmények elkerülése érdekében a becslőt korlátozásokkal egészítettem ki.
(**[O6], [O7]**)
Egy egyszerűsített állapotbecslési feladatot oldottam meg egyszerű kvantumbitre a Bayes megközelítést használva. A becslés a kvantumbit Bloch reprezentációján és a Pauli spin operátorok Neumann mérésén alapul.

Mivel a három különböző mérés nem kompatibilis, ezért a feladat a három Bloch vektor komponens egyenkénti becslésévé egyszerűsödött. A teljes becslő a három komponens valószínűségi sűrűségfüggvényének szorzataként áll elő. Mivel a kapott Bayes becslő gyengén teljesített tiszta állapotok esetén, egy kiegészítő korlátozást vettem figyelembe. Ezáltal egy olyan becslő adódott, amely mindig fizikailag értelmes eredményt ad, de számításigényesebb.

A saját készítésű Spinsim [O8] szimulátor segítségével összehasonlítottam az eredeti és a korlátozást is figyelembe vevő Bayes állapotbecslőt. Szembetűnő különbség abban az esetben mutatkozott, amikor tiszta állapot becslése, vagy kevés mérésen alapuló becslés volt a feladat.

4. Tézis *Egy új, komponensenkénti kvantum állapotbecslési sémát fejlesztettem ki N-szintű kvantumrendszerekre. A mérési adatokat N^2-1 különböző obszervábilis Neumann méréséből nyertem. A becslő a fenti mérések eredményeiből határozza meg a sűrűségmátrix N^2-1 paraméterének becsült értékét.*

Egy algebrai és egy geometriai elven működő módszert is alkalmaztam arra, hogy a becslő fizikailag értelmes eredményt szolgáltasson.

A becslő hatékonyságát több, az irodalomban megtalálhatóéval összehasonlítottam. Az összehasonlítás alapjául a becslők átlagos négyzetes hibamátrixa szolgált.

(**[O8], [O9], [O10]**)

N-szintű rendszerekre adtam egy megoldását a kvantumrendszerekre átfogalmazott állapotbecslési problémának.

A mérendő obszervábilisokat három különböző típusú Neumann méréscsoport alkotja. A becslési séma alapja az általános végesdimenziós kvantumrendszerek Bloch-parametrizációja. A becslő N^2-1 egyenlet segítségével ad becslést a sűrűségmátrix N^2-1 paraméterére, amely a mérési eredmények relatív gyakoriságát használó pontbecslés.

Bebizonyítottam, hogy a becslő torzítatlan, de bizonyos esetekben fizikailag értelmetlen eredményt ad, ezért egy pozitivitási korlátozással egészítettem ki a (17) becslőt.

Megmutattam, hogy invertálható állapotok esetén a korlátozást figyelembe vevő becslő a mérések számának növekedésével konvergál az eredetihez. Amennyiben a rendszer állapota az állapottér határán helyezkedik el, mindig szükség van a korlátozásra, amelyre két módszert is adtam.

A korlátozás nélküli becslő hatékonyságát összehasonlítottam kettő, a szakirodalomban megtalálható becslési sémáéval. Az összehasonlításhoz az átlagos négyzetes hibamátrixot használtam. Megmutattam, hogy az általam kifejlesztett becslési módszer hatékonyabb, mint a másik kettő.

4. A tézisekhez kapcsolódó publikációk

[O1] A. Magyar and K. M. Hangos. Lotka-Volterra representation of process systems for stability analysis. *In Proceedings of 14th International Conference on Process Control (PC'03)*, Štrbské Pleso, Szlovákia, 2003. (**1. Tézis**)

[O2] A. Magyar and K. M. Hangos. Lotka-Volterra representation of process systems for stability analysis. *In Proceedings of 4th International PhD Workshop on Systems and Control*, Libverda, Csehország, 2003. (**1. Tézis**)

[O3] A. Magyar, G. Szederkényi, and K. M. Hangos. Quadratic stability of process systems in generalized Lotka-Volterra form. *In Proceedings of 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control (NOLCOS 2004)*, Stuttgart, Németország, 2004. (**1. Tézis**)

[O4] G. Szederkényi, K.M. Hangos, and A. Magyar. On the time-reparametrization of quasi-polynomial systems. *Physics Letters A*, 334:288–294, 2005. **impakt faktor: 1.550**. (**1. Tézis**)

[O5] A. Magyar, G. Szederkényi, and K. M. Hangos. Quasi-polynomial system representation for the analysis and control of nonlinear systems. *In Proceedings of 16th IFAC World Congress*, Prága, Csehország, 2005. (**2. Tézis**)

[O6] A. Magyar, K. M. Hangos, and D. Petz. Bayesian qubit tomography. *In Proceedings of 6th International PhD Workshop on Systems and Control*, Izola - Simonov zaliv, Szlovénia, 2005. (**3. Tézis**)

[O7] A. Magyar, D. Petz, and K. M. Hangos. Bayesian qubit state estimation. *In Proceedings of 14th IFAC Symposium on System Identification (SYSID-2006)*, Newcastle, Ausztrália, 949–954, 2006. (**3. Tézis**)

[O8] D. Petz, K. M. Hangos, A. Magyar, and L. Ruppert. State estimation of n-level quantum systems. *Research report no. SCL-007/2006, Computer and Automation Research Institute*, 2006. (**4. Tézis**)

[O9] L. Ruppert and A. Magyar. The effect of constraints on LS state estimators for a qubit. *In Proceedings of 7th International PhD Workshop*, Hruba Skala, Csehország, ISBN: 80-903834-1-6, 2006. (**4. Tézis**)

[O10] D. Petz, K. M. Hangos, and A. Magyar. Point estimation of states of finite quantum systems. *Journal of Physics A: Math. Theor.*, 40:7955–7969, 2007. **impakt faktor: 1.566**. (**4. Tézis**)

[O11] A. Magyar, G. Szederkényi and K. M. Hangos. Globally stabilizing feedback control of process systems in generalized Lotka-Volterra form. *Journal of Process Control*, 2007. megjelenés alatt. (**2. Tézis**)

5. Alkalmazási területek, további munka

A kvázipolinomiális (1) modellosztály segítségével könnyedén leírhatók a reakciókinetikai hálózat formájában adott biokémia rendszerek. Ilyen rendszerek állapotai jellemzően koncentrációk, tehát ezek is pozitív rendszerek. A reakciókinetikai hálózatok *tömeg hatás törvény*en alapuló leírása lehetőseget nyújt arra, hogy az 1. és a 2. tézisek és a klasszikus reakciókinetika eredményeit együttesen alkalmazzuk erre a rendszerosztályra.

Másrészt, mechanikai-termodinamikai rendszerek (pl. gázturbinák) szintén beágyazhatók QP alakba, így a (5) Ljapunov függvény segítségével vizsgálható globális stabilitásuk. *Kvadratikus Ljapunov függvény* használatával lokális stabilitási tartományuk is egyszerűen meghatározható, LMI-k megoldásával.

Amennyiben robusztussági és performancia kritériumokat egy megfelelő költségfüggvény formájában írjuk fel, előírhatjuk a tervezendő szabályozó minőségi tulajdonságait is. A visszacsatoló struktúra kiválasztása szintén egy fontos kérdés, hiszen egy jól megválasztott visszacsatolással csökkenthető a megoldandó BMI mérete. Éppen ezért, egyik jövőbeli továbbfejlesztési irány a gráfelméleti módszerekkel támogatott szabályozó struktúra tervezés.

A rubusztussági specifikációkkal kiegészített szabályozótervezési BMI és a visszacsatoló struktúra tervezés együttesen egy teljes stabilizáló módszerré bővítené a QP szabályozótervezést.

A kvantumrendszerek mérésénél alkalmazott stratégia, miszerint az ismételt méréseket a rendszer másolatain hajtjuk végre, jól alkalmazható egy lézernyalábbeli fotonok polarizációjának mérésére, tehát a 3. és 4. tézisben bemutatott kvantum állapotbecslési módszerek alkalmazható fotonforrások identifikációjára. Ily módon a rendszer állapotának a forrás által kibocsátott fotonok polarizációja felel meg, és mivel a kibocsátott fotonok ugyanolyan polarizációjúak, nincs szükség rendszerdinamikára.

Miután a kvantum állapotbecslési módszerek elég nagy megbízhatósággal teljesítenek olyan esetben, amikor a kvantumrendszer dinamikáját nem vesszük figyelembe, következő lépésként egyszerű kvantumcsatornák becslésére használnám őket. Az alapfeladat a következő: ismert állapotú kvantumbitek haladnak át egy ismeretlen (valamely paraméterrel leírt) kvantumcsatornán, aminek a kimenetét mérjük. Keressük a csatorna paraméterének minél pontosabb értékét.

Egy másik lehetséges út a rendszerdinamika figyelembevétele az állapotbecslés során. Természetesen ebben az esetben egy, a Neumann félétől merőben különböző típusú mérést kellene használni, amely nem teszi (annyira) tönkre a rendszer állapotát. Ilyen mérések hátránya valószínűleg az, hogy nem szolgáltatnak annyi információt, mint egy Neumann mérés, vagy egy POVM.

Miután rendelkezésre áll egy alkalmas módszer, ami dinamika mellett is képes kvantumrendszerek állapotát megbecsülni, szabaddá válik az út a kvantumrendszerek irányítása felé.

Hivatkozások

[1] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 1995.

[2] H. Nijmeijer A. J. Van der Schaft. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer, New York, Berlin, 1990.

[3] K. J. Aström and B. Wittenmark. *Computer-controlled systems*. Prentice Hall, 1997.

[4] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.

[5] M.A. Henson and D.E. Seborg. *Nonlinear Process Control*. Prentice Hall, NJ, 1997.

[6] B. Hernández-Bermejo and V. Fairén. Nonpolynomial vector fields under the Lotka-Volterra normal form. *Physics Letters A*, 206:31–37, 1995.

[7] B. Hernández-Bermejo and V. Fairén. Lotka-Volterra representation of general nonlinear systems. *Math. Biosci.*, 140:1–32, 1997.

[8] B. Hernández-Bermejo. Stability conditions and Lyapunov functions for quasi-polynomial systems. *Applied Mathematics Letters*, 15:25–28, 2002.

[9] R. L. Kosut, I. Walmsley, and H. Rabitz. Optimal experiment design for quantum state and process tomography and hamiltonian parameter estimation. *arXiv*, quant-ph/0411093:v1, 2004.

[10] C. W. Helstrom. *Quantum decision and estimation theory*. Academic Press, New York, 1976.

[11] A. Figueiredo, I. M. Gleria, and T. M. Rocha. Boundedness of solutions and Lyapunov functions in quasi-polynomial systems. *Physics Letters A*, 268:335–341, 2000.

[12] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.

[13] C. Scherer and S. Weiland. *Linear Matrix Inequalities in Control*. DISC, http://www.er.ele.tue.nl/sweiland/lmi.pdf, 2000.

[14] J. Bokor and G. Balas. Detection filter design for LPV systems - a geometric approach. *Automatica*, 40:511–518, 2004.

[15] J.G. VanAntwerp and R.D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10:363–385, 2000.

[16] J. J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, 1994.

[17] Gen Kimura. The Bloch vector for N-level systems. *arXiv:quant-ph/0301152 v2*, 2003.

[18] V. B. Braginsky, F. Y. Khalili, and K. S. Thorne. *Quantum Measurement*. Cambridge University Press, 1995.

[19] G. Alber, T. Beth, M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, M. Rötteler, H. Weinfurter, R. Werner, and A Zeilinger. *Quantum Information*. Springer, 2001.