

# POZITÍV BILINEÁRIS RENDSZEREK IRÁNYÍTHATÓSÁGA

MTA-SZTAKI \* KUTATÁSI JELENTÉS \* 2006/5

MATOLCSI MÁTÉ, VARGA ISTVÁN

ABSTRACT. A kutatási jelentés a pozitív bilineáris rendszerek irányíthatóságát mutatja be. Először számba veszi az időben folytonos rendszerekre meglévő tételeket, majd a diszkrét időinvariáns bilineáris rendszerek irányíthatóságát írja le két dimenzióban.

## 1. FOLYTONOS IDEJŰ POZITÍV BILINEÁRIS RENDSZEREK

Az irodalomban a pozitív bilineáris rendszerek elérhetőségével illetve irányíthatóságával kapcsolatban *csak* folytonos idejű rendszerekre vannak eredmények. Diszkrét idejű bilineáris rendszerekre csak egy-két eredmény található, de *nem* a pozitív esetre.

Egy folytonos idejű idő-invariáns homogén bilineáris rendszert az

$$(1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \left( A + \sum_{i=1}^m u_i B_i \right) \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A, B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, u \in \mathbb{R}$$

egyenlet írja le.

**Definíció 1.1.** Az (1) bilineáris rendszer pozitív ha minden  $\mathbf{x}(0) \geq 0$  esetben bármely  $u(t)$  kontroll mellett minden  $\mathbf{x}(t)$  nemnegatív marad.

Konnyú belátni a következő karakterizációt (lásd pl. [3], [8]):

**Tétel 1.1.** Az (1) rendszer pontosan akkor pozitív, ha  $A$  Metzler matrix (azaz minden diagonálison kívüli eleme nemnegatív, a diagonálisban pedig bármi lehet) és minden  $B_i$  diagonális mátrix.

A bilineáris rendszerek esetében egy origóból induló rendszer nem tudja elhagyni az origót, ezért az elérhetőség fogalma értelmetlenné válik, így természetes csak a rendszer irányíthatóságának vizsgálatára szorítkozni. A irányíthatóság vizsgálatánál pedig meg kellene mondani, hogy milyen kezdőállapotokat engedünk meg, és milyen végállapotokat akarunk elérni. Az irodalomban [3] kezdte a irányíthatóság vizsgálatát, és ő még minden  $\mathbf{x}(0) \geq 0$  nemnegatív vektorból akart elérni minden  $\mathbf{x}_1 > 0$  szigorúan pozitívat, de aztán a későbbiekben [1] és [8] már csak  $\mathbf{x}(0) > 0$  szigorúan pozitív kezdőállapotokat engedett meg. Látható, hogy kis zavar van az irodalomban, hogy mit is akarunk kontrollálhatóságnak nevezni, ezért maradjunk az utóbbinál:

**Definíció 1.2.** Az (1) rendszer pozitívan irányítható, ha egyrészt pozitív, másrészt minden  $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}_1 > 0$  pozitív vektorok esetén létezik olyan  $u(t)$  kontroll függvény amely véges időben a rendszert  $\mathbf{x}(0)$ -ból  $\mathbf{x}_1$ -be viszi.

A pozitív irányíthatóság elmélete itt egyáltalán nem olyan teljes mint a lineáris esetben. Bilineáris rendszerek esetében azonnal felmerül a kérdés, hogy hogyan változik a kontrollálhatóság a dimenzió ( $n$ ) és a kontrollok száma ( $m$ ) változtatásával. Nagyon kevés eredmény

van: az első eredmények két dimenzióban [3]-ban található, amelyeket [1] egészített ki, és így a két dimenziós eset teljes karakterizációját adta, amely a következő:

**Tétel 1.2.** *Tekintsük a (1) rendszert, ahol  $n = 2$ ,  $m = 1$ , és tegyük fel, hogy:*

- (A) *A Metzler mátrix*
- (B) *B diagonális mátrix  $b_1, b_2$  elemekkel a diagonálisban*
- (C)  *$b_1, b_2 \neq 0$*
- (D)  *$b_1 \neq b_2$*
- (E)  *$b_2 > 0$  (ez feltehető az általánosság megszorítása nélkül, hiszen különben a  $-B$  mátrixot tekintjük, és ugyanahhoz a kontroll problémához jutunk).*

*Ekkor a következők igazak:*

- (i) *Ha  $b_1 > 0$ , akkor a (1) rendszer pozitívan kontrollálható.*
- (ii) *Ha  $b_1 < 0$ , és  $(b_2 a_{11} - b_1 a_{22})^2 + 4b_1 b_2 a_{12} a_{21} > 0$ , valamint  $b_1 a_{22} - b_2 a_{11} > 0$ , akkor a (1) rendszer pozitívan kontrollálható.*
- (iii) *Minden más esetben a (1) rendszer pozitívan nem kontrollálható.*

A két dimenziós eset vizsgálatán kívül Boothby [3]-ben a következő (triviális) eredményt adja az  $n = m$  esetre:

**Tétel 1.3.** *Tekintsük a (1) rendszert, ahol  $n = m$  és A Metzler mátrix,  $B_i$ -k pedig lineárisan független diagonális mátrixok. Ekkor a rendszer pozitívan kontrollálható. (Sőt, bármely két pozitív vektor bármilyen úton összeköthető egymással!)*

Ez a két tétel teljessé teszi az  $n = 2$  eset vizsgálatát, hiszen ekkor csak  $m = 1, 2$  jön szóba. (Nyilván ugyanis elég az  $m \leq n$  esetre szorítkozni, hiszen ha a  $B_i$ -k nem függetlenek lineárisan, akkor az  $m$  csökkenthető néhány  $B_i$  elhagyásával.)

Az  $n > 2$  esetben elég kevés eredmény van (az utóbbi tétel persze arra is vonatkozik, de triviális.) Sachkov [7]-ben a következő tétellel megmutatta, hogy  $n > 2$  esetben generikusan (azaz a "legtöbb esetben") egy kontrol-változó nem elég a pozitív kontrollálhatósághoz:

**Tétel 1.4.** *Tekintsük a (1) rendszert, ahol  $n > 2$ ,  $m = 1$ , A Metzler és  $B = \text{diag}(b_i)$  diagonális. Ekkor ha*

- (i)  *$a_{1n} > 0, a_{n1} > 0$ , és  $a_{1j} + a_{nj} > 0$  minden  $j = 2, 3, \dots, n-1$  esetben, továbbá  $b_1 < b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} < b_n$ ,*

*vagy*

- (ii) *valamely  $i < j$ -re  $b_i = b_j$  és minden  $k \neq i$ -re  $a_{ik} > 0$  vagy minden  $k \neq j$ -re  $a_{jk} > 0$ , akkor a rendszer nem pozitívan irányítható.*

Sachkov [8]-ben vizsgálja az  $m = n - 1$  esetet, és a következő eredményeket kapja:

**Tétel 1.5.** *Legyen  $m = n - 1$ , A Metzler mátrix,  $B_i$ -k diagonálisak, és  $l = \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  (ahol a  $B_i$  mátrixokat a diagonálisban álló  $\mathbf{b}_i$  vektorral reprezentáltuk). Legyen  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  az  $l$  hipersíkra ortogonális nemnulla vektor, és tegyük fel, hogy  $\sum_{i=1}^n h_i \neq 0$ . Ekkor*

- (i) *Ha az A mátrix irreducibilis (azaz nincsen koordináta tengelyek által kifeszített nemtriviális invariáns altere), és a  $\mathbf{h}$  vektornak vannak ellentétes előjelű koordinátái, akkor a (1) rendszer pozitívan kontrollálható.*

- (ii) *Ha  $h_i \geq 0$  minden  $i$ -re, és  $\sum_{i=1}^n h_i a_{ii} \geq 0$  akkor a (1) rendszer pozitívan nem kontrollálható.*

Abban az esetben pedig ha  $\sum_{i=1}^n h_i = 0$  a következő teljesül: a (1) rendszer pontosan akkor pozitívan kontrollálható, ha  $\mathbf{h}$ -nak létezik legalább kettő pozitív és negatív koordinátája egyaránt.

Sachkov ezután (továbbra is [8]-ben erre a tételre alapozva ad néhány eredményt az  $m = n - 2$  illetve a tetszőleges  $m < n$  esetekre.

Amint látható, jelenleg nincs teljes karakterizációja a folytonos bilineáris rendszerek pozitív kontrollálhatóságának.

## 2. DISZKRÉT IDEJŰ POZITÍV BILINEÁRIS RENDSZEREK

Az irodalomban semmiféle ilyen eredményt nem található. Diszkrét (de nem pozitív) bilineáris rendszerek kontrollálhatóságáról létezik egy elégséges feltétel [9]-ban, ami a következő:

**Tétel 2.1.** *Az  $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + u(k)B\mathbf{x}(k)$  rendszer kontrollálható  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ -n, ha léteznek olyan  $N, M$  pozitív egészek, hogy minden  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ -re*

- (i)  $\|A^N x\| = \|x\|$  (azaz  $A^N$  ortogonális leképezés)
- (ii)  $H_M(x) := [BA^{M-1}x, ABA^{M-2}x, \dots, A^{M-1}Bx]$  rangja  $n$ .

Ez elég speciális eset az (i) követelmény miatt. A kontrollálhatóság teljes karakterizációja nem ismert.

Tekintsük tehát az

$$(2) \quad \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^m u_i(k)B_i\mathbf{x}(k) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad A, B_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, u_i \in \mathbb{R}$$

diszkrét idejű homogén bilineáris rendszert. Ennek pozitívítását karakterizálja a következő állítás:

**Tétel 2.2.** *A (2) rendszerre a következők ekvivalensek:*

- (i) Minden  $\mathbf{x}(0) \geq 0$  kezdőállapot és minden  $u_i(m) \geq 0$  ( $m = 1, \dots, k$ ) nemnegatív kontroll esetén az  $\mathbf{x}(k)$  állapot szintén nemnegatív
- (ii)  $A, B_i \geq 0$  elemenként

*Bizonyítás.* A (ii)  $\rightarrow$  (i) irány világos. A másik irányhoz rögzítsük a kontrollok értékét az időtől függetlenül  $u_i(k) = c_i$  értékkel. Ekkor egy állandó együtthatós differencia-egyenletet kapunk:  $\mathbf{x}(k+1) = (A + \sum_{i=1}^m c_i B_i)\mathbf{x}(k)$ . Ennek pozitívítása ekvivalens (triviálisan, és egyebként jól ismert módon a pozitív lineáris elméletből) azzal, hogy az  $D := A + \sum_{i=1}^m c_i B_i$  mátrix nemnegatív elemű. Ha  $A$ -nak lenne negatív eleme, akkor a  $c_i = 0$  választással  $D$ -nek is lenne. Ha valamelyik  $B_i$ -nek lenne negatív eleme akkor az adott  $c_i$ -t nagyra választva, a többit pedig lenullázva szintén elérhető lenne, hogy  $D$ -nek legyen negatív eleme. Tehát  $D$  csak akkor lesz minden nemnegatív  $c_i$  választás mellett nemnegatív, ha  $A$  és minden  $B_i$  nemnegatív.  $\square$

Most bevezetjük a kontrollálhatóság erős és gyenge definícióját, majd  $n = 2$  dimenzióban karakterizáljuk is azokat. Természetesen az origóból induló rendszerek diszkrét bilineáris esetben is az origóban maradnak, így az elérhetőség vizsgálatának nincs értelme. A kontrollálhatóságot vizsgálhatjuk az összes nemnulla nemnegatív vektorra, vagy csak a szigorúan pozitív vektorokra.

**Definíció 2.1.** *Az  $(A, B_i \geq 0)$  mátrixok által megadott bilineáris rendszert erősen pozitívan irányíthatónak nevezzük ha minden  $\mathbf{x}(0) \geq 0$ ,  $\mathbf{x}(0) \neq 0$  kezdőállapot és minden  $\mathbf{x}_1 \geq 0$ ,  $\mathbf{x}_1 \neq 0$  vektor esetén van olyan véges nemnegatív kontroll-sorozat, amely  $\mathbf{x}(0)$ -t átviszi  $\mathbf{x}_1$ -be.*

*Az  $(A, B_i \geq 0)$  mátrixok által megadott bilineáris rendszert gyengén pozitívan irányíthatónak nevezzük ha minden  $\mathbf{x}(0) > 0$  kezdőállapot és minden  $\mathbf{x}_1 > 0$  vektor esetén van olyan véges nemnegatív kontroll-sorozat, amely  $\mathbf{x}(0)$ -t átviszi  $\mathbf{x}_1$ -be.*

Most megvizsgáljuk az erős kontrollálhatóság feltételeit  $n = 2$  dimenzióban  $m = 1$  kontroll változó esetén. A feltételek azon az egyszerű észrevételen alapulnak, hogy a pozitív koordináták nemnegatív input mellett 'nehezen' válhatnak nullává.

**Tétel 2.3.** *Az  $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + u(k)B\mathbf{x}(k)$ ,  $(A, B) \geq 0$  mátrixok által megadott  $n = 2$  dimenziós bilineáris rendszer pontosan akkor erősen pozitívan irányítható, ha (a változók esetleges permutálása után)  $A$  és  $B$  a következő alakú:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ es } B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ ahol } a_{12} > 0 \text{ es } b_{21} > 0, b_{22} > 0, \text{ es } b_{12} \geq 0.$$

*Bizonyítás.* Először a szükségességet látjuk be. Ha az  $\mathbf{x}(0)$  kezdőállapot mindkét koordinátája pozitív, és  $A$ -nak nincs csupa 0 sora, akkor nyilvánvaló, hogy minden  $\mathbf{x}(k)$ -nak is mindkét koordinátája pozitív marad, így a rendszer nem lehet erősen irányítható (mert nem nullázódhat le egyik koordináta sem). Tehát  $A$  egyik sora csupa 0, és feltehető (a változók esetleges permutálása után), hogy ez  $A$  második sora. Ha  $a_{11} > 0$ , és az  $\mathbf{x}(0)$  kezdőállapot első koordinátája  $x_0$  pozitív, akkor minden  $k$ -ra  $\mathbf{x}(k)$  első koordinátája legalább  $a_{11}^k x_0$ , azaz nem válhat nullává, tehát a rendszer nem erősen irányítható. Tehát szükséges, hogy  $a_{11} = 0$ . Nyilván ha  $a_{12} = 0$ , akkor  $A = 0$ , és a rendszer nem irányítható, így  $a_{12} > 0$  szükséges. Tehát  $A$  a kívánt alakú.

A továbbiakban bevezetjük azt a 'szektor-analízis' módszert, amellyel a irányíthatóság hatékonyan vizsgálható. Jelölésben, ha  $\mathbf{e}, \mathbf{f}$  nemnegatív vektorok, akkor  $S_{\mathbf{e}, \mathbf{f}}$  fogja jelölni az  $\mathbf{e}$  és  $\mathbf{f}$  által kifeszített szektort (kúpot) a pozitív negyedben. A koordináta-tengelyeket  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  fogja jelölni.

Jelölje  $\mathbf{b}_1$  és  $\mathbf{b}_2$  a  $B$  mátrix két oszlopát. Ha  $b_{11}$  és  $b_{12}$  egyike sem nulla, akkor tekintsük  $\mathbf{b}_1$  és  $\mathbf{b}_2$  közül a nagyobb meredekségűt, legyen ez  $\mathbf{e}$ . Ekkor az  $S = S_{\mathbf{x}, \mathbf{e}}$  szektor invariáns, így a rendszer nem kontrollálható. Az  $S$  szektor invariancián azt értjük, hogy ha  $\mathbf{x}(k) \in S$  akkor  $\mathbf{x}(k+1) \in S$ . Ez pedig világos, hiszen  $A\mathbf{x}(k)$  az  $\mathbf{x}$ -tengelyre esik, míg  $u(k)B\mathbf{x}(k)$  nem lehet meredekebb mint  $\mathbf{e}$ . Tehát ha a rendszer  $S$ -ből indul akkor  $S$ -ben is marad, így nem irányítható. Tehát szükséges, hogy  $b_{11}$  és  $b_{12}$  valamelyike 0 legyen.

Ha  $b_{11} \neq 0$ , akkor az  $\mathbf{y}$  tengely elhagyásával keletkező  $F := \mathbb{R}_+^2 \setminus \mathbf{y}$  félig nyílt pozitív negyed lesz rendszer-invariáns, tehát az  $\mathbf{y}$  tengely  $F$ -bol nem érhető el, így a rendszer nem erősen irányítható. Tehát  $b_{11} = 0$  szükséges. Nyilván ezután  $b_{21} > 0$  szükséges, különben a rendszer 'nilpotens', azaz az  $\mathbf{x}$  tengelyt az origóba képzi, így nem irányítható. Továbbá  $b_{22} > 0$  szintén szükséges, hiszen  $b_{22} = 0$  esetén a két tengely uniója invariáns halmaz lenne.

Ezzel a szükségességet beláttuk. Az elégségesség belátásához ismét a szektor-analízist hívjuk segítségül. Megvizsgáljuk, hogy hogyan változik az  $\mathbf{x}(0)$ -ből elérhető vektorok halmaza a  $k$  lépésszám növelésével. Tegyük fel, hogy valamely  $k$ -ra egy teljes  $S_k := S_{\mathbf{e}, \mathbf{f}}$  szektor elérhető  $\mathbf{x}(0)$ -ből. Könnyen látható, hogy ekkor az  $S_{k+1}$  elérhetőségi halmaz az  $A\mathbf{e}, A\mathbf{f}, B\mathbf{e}, B\mathbf{f}$  vektorok által kifeszített szektor lesz (azaz a négy vektor közül a legnagyobb meredekségű és a legkisebb meredekségű közé eső szektor). Ezzel az észrevétellel már meg tudjuk mutatni a rendszer erős irányíthatóságát.

Feltehető, hogy  $\mathbf{x}(0)$  az  $\mathbf{x}$  tengelyen van (máskülönben  $A$  egyszeri alkalmazásával és  $u(1) = 0$  irányít oda jutunk). Ekkor az  $S_1$  elérhetőségi halmaz az  $A$  és  $B$  alakjából adódóan a teljes  $\mathbf{y}$ -tengely lesz. Az  $S_2$  második elérhetőségi halmaz az  $\mathbf{x}$ -tengely és a  $B$  második oszlopvektora által kifeszített  $S_{\mathbf{x}, \mathbf{b}_2}$  szektor. Mivel  $B$  az  $\mathbf{x}$ -tengelyt átviszi az  $\mathbf{y}$ -tengelybe, és  $A$  a  $\mathbf{b}_2$  vektort (mint minden egyenest) az  $\mathbf{x}$ -tengelyre képzi, ezért a harmadik elérhetőségi halmaz a teljes  $\mathbb{R}_+^2$ , így a rendszer kontrollálható. Sőt, azt is beláttuk, hogy tetszőleges  $\mathbf{x}(0) \geq 0$  vektor legfeljebb 4 lépés alatt átvihető tetszőleges  $\mathbf{x}_1 \geq 0$  vektorba (azért négy, mert az elején

feltettük, hogy az  $\mathbf{x}$ -tengelyről indulunk, és valójában az odajutás is egy lépésbe kerülhet).  
□

**Tétel 2.4.** *Az  $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + u(k)B\mathbf{x}(k)$ ,  $(A, B) \geq 0$  mátrixok által megadott  $n$ -dimenziós bilineáris rendszer erősen pozitívan irányítható, ha (a változók esetleges permutálása után)  $A$  és  $B$  a következő alakú:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix},$$

ahol a  $*$ -gal jelölt elemek szigorúan pozitívak.

*Bizonyítás.* Tegyük fel először az egyszerűség kedvéért, hogy  $A$ -ban a  $*$ -ok helyén csak 1-ek állnak. Vegyük észre, hogy ekkor  $A$  hatása az, hogy minden koordinátát eggyel feljebb tol, míg az utolsó helyre 0-t rak.  $B$  pedig a koordináták súlyozott összegét teszi az utolsó helyre, a többi helyre 0-t. Ezekből könnyen következik, hogy tetszőleges  $\mathbf{x}(0) \geq 0$  nemnulla vektorból legfeljebb  $n$  lépésben elérhetünk egy olyan  $\mathbf{x}(n)$  vektort amelynek minden koordinátája pozitív (hiszen  $B$  alkalmazásával az utolsó helyre mindig pozitív kerül, és  $A$  azt tologatja feljebb). Ezután már minden koordinátát be tudunk állítani a kívánt értékre (az, hogy először olyan vektorba megyünk aminek minden koordinátája pozitív, az csak egy technikai lépés, hogy a koordinátánkénti beállításnál ne legyen baj az esetleges 0-val osztással). Tegyük fel, hogy az elérendő végállapot  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]^T$ . Ekkor  $\mathbf{x}(n+1)$  utolsó koordinátáját nyilván be tudjuk állítani megfelelő irányít  $z_1$ -re. Azután  $\mathbf{x}_{n+2}$  utolsó koordinátáját  $z_2$ -re, miközben  $\mathbf{x}(n+2)$  utolsó előtti koordinátája  $A$  hatása miatt automatikusan  $z_1$  lesz. Így koordinátánként lépkedve elérjük a kívánt  $\mathbf{z}$  vektort.

Ha  $A$ -ban nem csak 1-ek állnak, akkor is ugyanígy járunk el csak értelemszerűen a  $z_i$  koordináták megfelelő többszöröseit állítjuk be  $B$ -vel, hiszen figyelni kell arra, hogy  $A$  hatása alatt azok még szorozódni fognak a megfelelő  $A$ -beli elemekkel. □

Most ráterünk a gyenge kontrollálhatóság vizsgálatára  $n = 2$  dimenzióban. Először egy általános megjegyzést teszünk, amely bármely dimenzióban igaz. Az  $\mathbb{R}_+^n$  zárt pozitív ortáns nyilván invariáns halmaza a rendszerünknek. Vegyük észre, hogy a rendszer pontosan akkor gyengén irányítható, ha 'lényegében' nincs is más rendszer-invariáns halmaz. Pontosabban: az  $(A, B_i \geq 0)$  mátrixok által adott (2) diszkrét bilineáris rendszer pontosan akkor gyengén kontrollálható, ha minden  $\mathbb{R}_+^n$ -beli rendszer-invariáns halmaz vagy tartalmazza a nyílt  $\text{int}\mathbb{R}_+^n$  ortánst, vagy diszjunkt attól. Szükségesség: ha lenne  $H$  invariáns halmaz, ami tartalmazza  $\mathbf{x} > 0$  vektort, de nem tartalmazza az egész nyílt  $\text{int}\mathbb{R}_+^n$  ortánst, akkor nyilván  $\mathbf{x}$ -ből nem lehet  $H$ -n kívüli vektorokat elérni. Elégségesség: tetszőleges  $\mathbf{x} > 0$  esetén tekintsük az  $A(\mathbf{x})$  elérhetőségi halmazt, azaz azon nemnegatív vektorok halmazát, amelyek  $\mathbf{x}$ -ből véges időben elérhetők. Triviális, hogy  $A(\mathbf{x})$  rendszer-invariáns halmaz. Így feltétel szerint  $A(\mathbf{x})$  tartalmazza az egész  $\text{int}\mathbb{R}_+^n$  nyílt ortánst (hiszen diszjunkt nem lehet tőle, mert  $\mathbf{x} \in A(\mathbf{x})$ ). Tehát a kontrollálhatóság eldöntéséhez elég eldönteni, hogy van-e nem-triviális rendszer-invariáns halmaz. Más kérdés, hogy ezt eldönteni általában nem könnyű, de két dimenzióban még lehetséges.

A fenti megjegyzés azonnali következményeként a következő hasznos észrevételt tesszük: az  $A$  és  $B$  mátrixok az  $\mathbb{R}_+^2$  halmazt valamely  $S_A$  és  $S_B$  (esetleg elfajuló) szektorokba viszik, amelyeknek határai az  $A$  ill.  $B$  oszlopai. Ezek uniójának konvex burka (azaz a legnagyobb és

legkisebb meredekségű határoló vektorok közé eső szektor) egy rendszer-invariáns  $S$  szektor. Valóban, ha  $\mathbf{x}(0) \in S$  akkor minden  $\mathbf{x}(k) \in S$ , triviálisan. Tehát azt kaptuk, hogy  $S = \mathbb{R}_+^2$  szükséges a gyenge irányíthatósághoz. Erre a feltételre úgy fogunk később hivatkozni, mint az 'értékszektor feltétel'.

A másik egyszerű észrevétel, hogy  $A$  aszimptotikusan stabil kell legyen, azaz a Frobenius sajátértéke kisebb mint 1. Ellenkező esetben ugyanis  $\mathbf{x}(0)$ -t a Frobenius sajátértékhez tartozó nemnegatív sajátvektornak választva az origó közeli állapotok nem lesznek elérhetőek. Erre feltételre mint 'sajátérték feltétel' fogunk hivatkozni.

Előljáróban azt mondhatjuk, hogy a gyenge kontrollálhatóság  $n = 2$  dimenzióban az  $A, B$  mátrixok sajátértékeinek nagyságától, és a mátrixokban elhelyezkedő nullák helyzetétől függ. Mivel nagyon sok gyengén kontrollálható és nem gyengén kontrollálható eset van, az  $A$ -ban szereplő nullák száma és elhelyezkedése szerint vizsgáljuk az eseteket: Legjobb lenne néhány esetet ábrával illusztrálni, bejelölve a nem gyengén irányítható esetekben az invariáns halmazokat, és a gyengén irányítható esetekben az elérhetőségi halmazok növekedését, ahogy lépésenként kitöltik az egész  $\mathbb{R}_+^2$ -t.

Az alábbi esetek vizsgálatánál a nem gyengén kontrollálható eseteknél mindig odaírjuk az invariáns halmazt, amely mutatja a nem-kontrollálhatóságot. A irányítható eseteket pedig mindig kiemeljük külön tételként. Csak egy esetben adunk bizonyítást, a többi is hasonlóan megy.

### 1. eset: $A$ -ban nincs nulla.

Ekkor az  $S_A$  szektor határai  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  a pozitív negyed belsejébe esnek (mondjuk legyen  $\mathbf{a}_1$  a kisebb meredekségű határ), így az értékszektor feltétel miatt szükséges hogy  $S_B = \mathbb{R}_+^2$  legyen. Ez csak akkor lehet, ha  $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$  vagy  $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$ . Nyilván feltehető, hogy  $b_2 \geq b_1$ . Az első esetben az  $S_{\mathbf{a}_1, \mathbf{y}}$  szektor invariáns halmaz. A második esetben legyen  $\mathbf{e}$  olyan  $\mathbf{a}_1$ -nel kisebb meredekségű irány, hogy  $B\mathbf{e}$  már  $\mathbf{a}_2$ -nél nagyobb meredekségű. Ekkor az  $S_{\mathbf{e}, B\mathbf{e}}$  szektor invariáns. Tehát a rendszer nem lehet gyengén irányítható.

### 2. eset: $A$ -ban 1 nulla van.

Feltehető (a változók esetleges permutálása után), hogy a nulla az alsó sorban van. Ekkor két lehetőség van:

$$2.a. A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}.$$

A sajátérték feltétel miatt  $a_1, a_3 < 1$ . Az értékszektor feltétel miatt  $B$  egyik oszlopa  $\mathbf{y}$  irányú kell, hogy legyen. Ismét két lehetőség van:

2.a.I.  $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ekkor, ha  $a_1 \geq a_3$  és  $b_1 > p$  (vagy  $b_1 = p$  és  $b_2 = 0$ ), akkor  $B$ -nek van egy  $\mathbf{y}$ -től eltérő  $\mathbf{s}_B$  pozitív sajátvektora, és az  $S_{\mathbf{x}, \mathbf{s}_B}$  szektor invariáns (ha  $b_2 = 0$ , akkor persze  $\mathbf{s}_B = \mathbf{x}$ , de ekkor tetszőleges  $S_{\mathbf{x}, \mathbf{e}}$  szektor invariáns). Ha  $a_3 > a_1$ , akkor  $A$ -nak van egy  $\mathbf{x}$ -től eltérő  $\mathbf{s}_A$  pozitív sajátvektora, és ekkor  $p \geq b_1$  esetén az  $S_{\mathbf{s}_A, \mathbf{y}}$  szektor, míg  $p < b_1$  esetén az  $S_{\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B}$  szektor lesz invariáns. A fennmaradó esetben a rendszer gyengén kontrollálható, azaz

**Tétel 2.5.** *Legyenek  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $p > 0$ ,  $a_1, a_3 < 1$ , és  $a_1 \geq a_3$ . Ha  $b_1 = p$ ,  $b_2 > 0$ , VAGY  $b_1 < p$ ,  $b_2 \geq 0$  (itt  $b_2 = 0$  is lehet!), akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

**2.a.II.**  $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ekkor, ha  $a_3 > a_1$  akkor  $A$ -nak van egy  $\mathbf{x}$ -től eltérő  $\mathbf{s}_A$  pozitív sajátvektora, és az  $S_{\mathbf{s}_A, B\mathbf{s}_A}$  szektor invariáns. Más esetekben pedig:

**Tétel 2.6.** *Legyenek  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $p > 0$ ,  $a_1, a_3 < 1$ , és  $a_1 \geq a_3$ . Ekkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

**2.b.**  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix}$ .

A sajátérték feltétel miatt  $a_1 < 1$ . Az értékszektor feltétel miatt  $B$  egyik oszlopa  $\mathbf{y}$  irányú kell, hogy legyen. Továbbá vegyük észre, hogy  $A$ -nak létezik egy pozitív  $\mathbf{s}_A$  sajátvektora.  $B$ -re ismét két lehetőség van:

**2.b.I.**  $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ha itt  $b_1 > p$  (vagy  $b_1 = p$  és  $b_2 = 0$ ), akkor  $B$ -nek van egy  $\mathbf{y}$ -től eltérő  $\mathbf{s}_B$  pozitív sajátvektora. Legyen  $\mathbf{e}$  olyan vektor amely meredekebb  $\mathbf{s}_B$ -nél és  $A$  első oszlopánál. Ekkor  $S_{\mathbf{x}, \mathbf{e}}$  invariáns. A további esetben pedig:

**Tétel 2.7.** *Legyenek  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $p > 0$ ,  $a_1 < 1$ . Ha  $b_1 = p$ ,  $b_2 > 0$ , VAGY  $b_1 < p$ ,  $b_2 \geq 0$  (itt  $b_2 = 0$  is lehet!), akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

**2.b.II.**  $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ennek az esetnek a tárgyalása nem triviális. Először is könnyű belátni, hogy ha  $b_1 = 0$  akkor a rendszer gyengén irányítható. Tegyük fel tehát, hogy  $b_1 > 0$ . Ha létezik olyan  $\mathbf{e} > 0$  vektor, amelyre  $A\mathbf{e} = cB\mathbf{e}$  valamely  $c$ -re, akkor az  $S_{\mathbf{e}, A\mathbf{e}}$  szektor rendszerinvariáns. Ilyen  $\mathbf{e}$  vektor létezése a következővel ekvivalens: tekintsük a  $-pb_1c^2 + (pa_2 + a_3b_1 - a_1b_2)c - a_2a_3 = 0$  egyenlet nemnegatív  $c$  gyökét (ha van nemnegatív gyök; ez az egyenlet egyébként azt írja le, hogy az  $A - cB$  mátrix determinánsa 0), és ha ezzel a  $c$ -vel  $a_2 - cb_1 < 0$ , akkor létezik alkalmas  $\mathbf{e} = [cb_1 - a_2, a_1]^T$  vektor. Máskülönben nem létezik alkalmas  $\mathbf{e}$  vektor. Ha azt kaptuk, hogy nincs megfelelő  $\mathbf{e}$  vektor, akkor az következik, hogy  $B\mathbf{e}$  mindig nagyobb meredekségű, mint  $A\mathbf{e}$ . Tekintsük most a  $BA = \begin{bmatrix} a_3b_1 & 0 \\ pa_1 + a_3b_2 & pa_2 \end{bmatrix}$  mátrixot. Ha itt  $pa_2 < a_3b_1$ , akkor  $BA$ -nak létezik nem  $\mathbf{y}$  irányú pozitív sajátvektora,  $\mathbf{s}_{BA}$ . Legyen ekkor  $\mathbf{f}$  olyan irány, amely  $\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B, \mathbf{s}_{BA}$  mindegyikénél nagyobb meredekségű. Ekkor az  $S_{\mathbf{f}, A\mathbf{f}}$  szektor invariáns (mert:  $\mathbf{f}$  meredekebb mint  $A\mathbf{f}$  és  $B\mathbf{f}$  (mert  $A$  és  $B$  'áttükrözi'  $\mathbf{f}$ -et  $\mathbf{s}_A$ -n ill.  $\mathbf{s}_B$ -n), és  $B\mathbf{f}$  meredekebb mint  $A\mathbf{f}$  (mert ez minden irányra igaz), és végül  $BA\mathbf{f}$  kevésbé meredek mint  $\mathbf{f}$  (mert  $BA$  az  $\mathbf{f}$ -et közelíti  $\mathbf{s}_{BA}$ -hoz)). Egyéb esetekben a rendszer gyengén irányítható, azaz:

**Tétel 2.8.** *Legyenek  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $p > 0$ ,  $a_1 < 1$ . Ha itt  $b_1 = 0$  VAGY  $b_1 > 0$  és  $-pb_1c^2 + (pa_2 + a_3b_1 - a_1b_2)c - a_2a_3 = 0$  egyenlet nemnegatív  $c$  gyökére teljesül, hogy  $a_2 - cb_1 \geq 0$ , továbbá  $pa_2 \geq a_3b_1$ , akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

### 3. eset: $A$ -ban 2 nulla van.

Feltehető (a változók esetleges permutálása után), hogy legalább az egyik nulla az alsó sorban van. Ekkor három lehetőség van:

**3.a.**  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

A sajátérték feltétel miatt  $a_1 < 1$ . Az értékszektor feltétel miatt  $B$  egyik oszlopa  $\mathbf{y}$  irányú kell, hogy legyen. Ismét két lehetőség van:

**3.a.I.**  $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ha  $b_1 > p$ , akkor  $B$ -nek van egy  $\mathbf{y}$ -tól különböző irányú nemnegatív  $\mathbf{s}$  sajátvektora, és az  $S_{\mathbf{x},\mathbf{s}}$  szektor invariáns, így a rendszer nem irányítható (külön kell nézni a  $b_2 = 0$  esetet, mert ekkor  $\mathbf{s} = \mathbf{x}$ , de ilyenkor tetszőleges  $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$  szektor invariáns). Ha  $b_1 = p$  és  $b_2 = 0$ , akkor  $B$  az identitás mátrix többszöröse, és tetszőleges  $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$  szektor invariáns. A további esetek gyengén irányíthatóak, azaz:

**Tétel 2.9.** *Ha  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $p > 0$ ,  $a_1 < 1$ , és  $b_1 = p$ ,  $b_2 > 0$ , VAGY  $b_1 < p$ ,  $b_2 \geq 0$  (itt  $b_2 = 0$  is lehet!), akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

**3.a.II.**  $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ekkor  $b_1, b_2$  értékétől függetlenül (persze nemnegatívak, mint minden elem!) a rendszer gyengén kontrollálható:

**Tétel 2.10.** *Ha  $A$  és  $B$  a fenti alakúak, és  $p > 0$ , akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

**3.b.**  $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$ . Itt feltehetjük (esetleges változó permutálás után), hogy  $a_1 > a_2$ . A sajátérték feltétel miatt  $a_1, a_2 < 1$  szükséges. Ha az  $S_B$  szektor nem tartalmazza az  $\mathbf{y}$ -tengelyt, akkor az  $S_B$  szektor felső határegyenesét  $\mathbf{e}$ -vel jelölve az  $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$  szektor invariáns. Tehát szükséges, hogy  $B$  egyik oszlopa  $\mathbf{y}$  irányú legyen. Ismét két lehetőség van:

**3.b.I.**  $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ha  $b_1 > p$ , akkor létezik  $B$ -nek egy  $\mathbf{y}$ -tól különböző irányú nemnegatív  $\mathbf{s}$  sajátvektora, és az  $S_{\mathbf{x},\mathbf{s}}$  szektor invariáns, így a rendszer nem irányítható (külön kell nézni a  $b_2 = 0$  esetet, mert ekkor  $\mathbf{s} = \mathbf{x}$ , de ilyenkor tetszőleges  $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$  szektor invariáns). Ha  $b_1 = p$  és  $b_2 = 0$ , akkor  $B$  az identitás mátrix többszöröse, és tetszőleges  $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$  szektor invariáns. A maradék esetben a rendszer gyengén irányítható lesz, amit összefoglalva:

**Tétel 2.11.** *Ha  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $a_1, a_2 < 1$ ,  $p > 0$ , és  $p > b_1$ , VAGY  $p = b_1$  és  $b_2 > 0$ , akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

**3.b.II.**  $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ha itt  $b_1 = 0$  akkor az első koordinátát nem tudjuk irányítani, tehát szükséges, hogy  $b_1 > 0$ . További feltétel nincs, azaz:

**Tétel 2.12.** *Ha  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $a_1, a_2 < 1$ ,  $p, b_1 > 0$ , akkor a rendszer gyengén irányítható.*

**3.c.**  $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}$ . Itt a sajátérték feltétel miatt  $a_1 \cdot a_2 < 1$  szükséges. Ha  $S_B$  egyik tengelyt sem tartalmazza, akkor tekintsünk egy olyan  $\mathbf{e}$  irányt, amelynek meredeksége kisebb  $S_B$  alsó határegyenesénél, és  $A\mathbf{e}$  meredeksége nagyobb  $S_B$  felső határegyenesénél. Ekkor az  $S_{\mathbf{e},A\mathbf{e}}$  szektor invariáns. Feltehető tehát (esetleges változó permutálás után), hogy  $B$  egyik oszlopa  $\mathbf{y}$  irányú. Ismét két lehetőség van:

**3.c.I.**  $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ha itt  $b_1 > p$  és  $b_2 > 0$ , akkor  $B$ -nek van egy tengelyektől eltérő irányú pozitív  $\mathbf{s}$  sajátvektora. Legyen  $\mathbf{e}$  olyan  $\mathbf{s}$ -nél kisebb meredekségű irány, hogy  $A\mathbf{e}$  már  $\mathbf{s}$ -nél nagyobb meredekségű. Ekkor az  $S_{\mathbf{e},A\mathbf{e}}$  szektor invariáns. Ha  $b_1 = p$  és  $b_2 = 0$ , akkor pedig az  $A$  mátrix sajátvektora rendszer-invariáns irány. A további esetek gyengén kontrollálhatóak, azaz:

**Tétel 2.13.** *Legyenek  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $a_1 \cdot a_2 < 1$ ,  $p > 0$ . Ha  $p > b_1$  VAGY  $p = b_1$  és  $b_2 > 0$ , VAGY  $p < b_1$  és  $b_2 = 0$ , akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

**3.c.II.**  $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Tegyük fel először, hogy  $b_1, b_2 > 0$ . Ekkor létezik olyan  $c > 0$ , amellyel  $cb_1 = a_1$ . Ha most  $cp - a_2 < 0$ , akkor az  $\mathbf{e} := [cb_2, a_2 - cp]^T$  pozitív vektort  $A$  és  $cB$  ugyanoda képezi, és így az  $S_{\mathbf{e}, A\mathbf{e}}$  szektor rendszer-invariáns. Ha  $b_1$  vagy  $b_2$  értékét 0-nak is megengedjük, akkor  $b_2 = 0$  esetén az  $a_1/a_2 = b_1/p$  esetben  $A = cB$  így a rendszer nem gyengén kontrollálható. Minden más esetben a rendszer gyengén kontrollálható, azaz:

**Tétel 2.14.** *Legyenek  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $a_1 \cdot a_2 < 1$ ,  $p > 0$ . Ha  $b_1 = 0$  VAGY  $b_2 = 0$  és  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{p}$  VAGY  $b_1, b_2 > 0$  és  $\frac{a_1}{b_1}p - a_2 \geq 0$  akkor a rendszer gyengén irányítható.*

#### 4. eset: $A$ -ban 3 nulla van.

Feltehető (a változók esetleges permutálása után), hogy a nem nulla elem a felső sorban van. Ekkor két lehetőség van:

**4.a.**  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

A sajátérték feltétel miatt  $a < 1$ . Az értékszektor feltétel miatt  $B$  egyik oszlop  $\mathbf{y}$  irányú kell, hogy legyen. Ismét két lehetőség van:

**4.a.I.**  $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ha itt  $b_1 = 0$  akkor az első koordinátát nem tudjuk irányítani, tehát feltehető, hogy  $b_1 > 0$ . Ha  $b_1 > p$ , akkor  $B$ -nek van egy  $\mathbf{y}$ -tól különböző irányú nemnegatív  $\mathbf{s}$  sajátvektora, és az  $S_{\mathbf{x}, \mathbf{s}}$  szektor invariáns, így a rendszer nem irányítható (külön kell nézni a  $b_2 = 0$  esetet, mert ekkor  $\mathbf{s} = \mathbf{x}$ , de ilyenkor tetszőleges  $S_{\mathbf{x}, \mathbf{e}}$  szektor invariáns). Ha  $b_1 = p$  és  $b_2 = 0$ , akkor  $B$  az identitás mátrix többszöröse, és tetszőleges  $S_{\mathbf{x}, \mathbf{e}}$  szektor invariáns. A maradék esetben a rendszer gyengén irányítható lesz, amit összefoglalva:

**Tétel 2.15.** *Ha  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $p > 0$ ,  $a < 1$ , és  $b_1 = p$ ,  $b_2 > 0$ , VAGY  $b_1 < p$ ,  $b_2 \geq 0$  (itt  $b_2 = 0$  is lehet!), akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

*Bizonyítás.* Az összes gyengen irányítható eset bizonyítása ugyanúgy megy: az ember belátja, hogy az elérhetőségi halmaz lépésenként kitölti az egész  $\mathbb{R}_+^2$ -t. Itt most ezt leírom, de a többi esetben csak a gyenge kontrollálhatóság tényét fogom közölni bizonyítás nélkül. Ha szerinted szükség van rá, akkor persze utólag le tudom írni az összes eset bizonyítását. Szerintem csak unalmassá teszi a tárgyalást...

Legyen tehát  $\mathbf{x}(0) = [x, y]^T > 0$ . Belátjuk, hogy  $A(\mathbf{x}) \supset \text{int}\mathbb{R}_+^2$ . Jelölje  $\mathbf{e}$  a  $B$  első oszlopát, és először tegyük fel, hogy  $b_2 > 0$ . Az  $u(1) = 0$  irányít az  $\mathbf{x}$ -tengelyre jutunk az  $[ax, 0]^T$  pontba. Ezután tetszőleges  $[a^2x, 0]^T + u(2)\mathbf{e}$  pontba juthatunk, tehát egy  $[a^2, 0]$ -ből induló félegyenest teljesen elérhetünk. Ezután  $u(3) = 0$ -val az  $\mathbf{x}$ -tengely egész  $a^3x$ -nél nagyobb-egyenlő része elérhető. Így lépésenként az egész nyílt  $\mathbf{x}$ -tengely bármely pontja elérhető véges lépésben (hiszen  $a^n x$  0-hoz tart). Ezután tetszőleges  $[z, 0]^T + u\mathbf{e}$  pont elérhető, azaz, a teljes félig nyílt  $S_{\mathbf{x}, \mathbf{e}}$  szektor. Az  $S_1 = S_{\mathbf{x}, \mathbf{e}}$  szektor  $A$  és  $B$  általi képet tekintve láthatjuk, hogy az  $S_1$  pontjaiból egy lépésben elérhetőek az  $S_2 = S_{\mathbf{x}, B\mathbf{e}}$  pontjai. Azután pedig az  $S_3 = S_{\mathbf{x}, B^2\mathbf{e}}$  pontjai. És kihasználva, hogy  $B^n\mathbf{e}$  a feltételek miatt az  $\mathbf{y}$ -tengelyhez tart készen is vagyunk.

A  $b_2 = 0$ ,  $b_1 < p$  eset bizonyítása is teljesen hasonló, csak ebben az esetben nem szabad az első lépésben lemenni az  $\mathbf{x}$ -tengelyre mert az invariáns halmaz, és nem lehet elhagyni.

Ehelyett  $u(1) = \varepsilon$ -nal a második koordinátát pozitívan kell tartani. Egyébként ugyanúgy megy.  $\square$

**4.a.II.**  $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ha itt  $b_1 = 0$  akkor az első koordinátát nem tudjuk irányítani, tehát feltehető, hogy  $b_1 > 0$ . Minden más eset kontrollálható, azaz

**Tétel 2.16.** *Ha  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $p > 0$ ,  $a < 1$ , és  $b_1 > 0$ , akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

**4.b.**  $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Most  $a > 1$  is megengedett. Az értékszektor feltétel miatt  $B$  egyik oszlop  $\mathbf{y}$  irányú kell, hogy legyen. Ismét két lehetőség van:

**4.b.I.**  $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ha  $b_1 > p$ , akkor létezik  $B$ -nek egy  $\mathbf{y}$ -tól különböző irányú nemnegatív  $\mathbf{s}$  sajátvektora, és az  $S_{\mathbf{x},\mathbf{s}}$  szektor invariáns, így a rendszer nem irányítható (külön kell nézni a  $b_2 = 0$  esetet, mert ekkor  $\mathbf{s} = \mathbf{x}$ , de ilyenkor tetszőleges  $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$  szektor invariáns). Ha  $b_1 = p$  és  $b_2 = 0$ , akkor  $B$  az identitás mátrix többszöröse, és tetszőleges  $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$  szektor invariáns. A maradék esetben a rendszer gyengén irányítható lesz, amit összefoglalva:

**Tétel 2.17.** *Ha  $A$  és  $B$  a fenti alakúak,  $p > 0$ , és  $p > b_1$ , VAGY  $p = b_1$  és  $b_2 > 0$ , akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

**4.b.II.**  $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$ , ahol  $p > 0$ . Ekkor  $b_1, b_2$  értékétől függetlenül a rendszer gyengén kontrollálható:

**Tétel 2.18.** *Ha  $A$  és  $B$  a fenti alakúak, és  $p > 0$ , akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

## 5. eset: $A$ -ban 4 nulla van.

Ekkor  $A = 0$ , és a rendszer nyilván nem irányítható.

Ezzel a gyenge irányíthatóság karakterizációját  $n = 2$  dimenzióban befejeztük.

Felsorolunk néhány nyitott kérdést ami jövőbeni kutatás tárgyát képezheti:

1. *Probléma.* Karakterizáljuk a pozitív diszkrét bilineáris rendszerek irányíthatóságát  $n > 2$  dimenzióban, vagy legalábbis adjunk könnyen ellenőrizhető szükséges illetve elégséges feltételeket.

2. *Probléma.* Vizsgáljuk meg a pozitív irányíthatóságot az  $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^m u_i(k)B_i\mathbf{x}(k)$  rendszer esetén, ha  $m > 1$ .

3. *Probléma.* Vizsgáljuk a pozitív irányíthatóságot  $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^m u_i(k)B_i\mathbf{x}(k) + v(k)\mathbf{b}$  inhomogén rendszer esetében.

## 3. IRÁNYÍTHATÓSÁG A POZITÍV OKTÁNSON BELÜL

Ez az amit Szabó Zoli javasolt, hogy hogyan enyhítsük a pozitív kontrollálhatóság definícióját. Erről semmi sincs az irodalomban. Egy kevés saját eredményem van:

**Definíció 3.1.** *Egy lineáris (??) vagy bilineáris (2) rendszert a pozitív oktánszon belül erősen irányíthatónak nevezünk, ha a rendszer nem feltétlenül pozitív, de minden  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mathbf{x}_1 \geq 0$  nemnegatív állapotokhoz létezik olyan véges kontroll sorozat, amely  $\mathbf{x}(0)$ -t átviszi  $\mathbf{x}_1$ -be miközben*

minden közbülső  $\mathbf{x}_k$  állapot nemnegatív marad (a bilineáris esetben nyilván  $\mathbf{x}(0) \neq 0$  is fel kell tenni).

A rendszer a pozitív oktánson belül gyengén kontrollálható, ha ugyanez igaz minden  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mathbf{x}_1 > 0$  szigorúan pozitív vektorra.

Ezekre a fogalmakra röviden mint POBEK és POBGYK fogok hivatkozni, vagy ha nem akarom specifikálni hogy melyikről van szó, akkor csak POBK.

Nyilván ha a rendszer pozitív és kontrollálható (mint az előző fejezetekben), akkor ebben az új értelemben is kontrollálható. Azt várjuk azonban, hogy sok nem pozitív rendszer is kontrollálható a pozitív oktánson belül. Azonnal felmerül a kérdés, hogy a szokásos (nem pozitív) kontrollálhatóság vajon elegendő-e a POBK-hoz? Azaz, ha egy rendszer kontrollálható, akkor tudjuk-e úgy is kontrollálni, hogy közben nem hagyjuk el a pozitív oktánst. A válasz talán meglepő módon nemleges, amint a következő példa mutatja:

**Példa 3.1.** Legyen  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  és  $b = [0, 1]^T$ , illetve  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Ekkor az  $(A, b)$  által megadott lineáris ill.  $(A, B)$  által megadott bilineáris rendszerek kontrollálhatók, de egyik sem POBK. Ezt könnyű látni, hiszen tetszőleges  $\mathbf{x}(0) > 0$  vektor esetén  $A\mathbf{x}(0)$  első koordinátája negatív lesz, és ezen a kontroll-változóval nem tudunk változtatni.

Tehát a hagyományos kontrollálhatóság *nem elégséges* feltétele a PBOK-nak (és ez nem csak 2 dimenzióban van így, hasonló példákat könnyű magasabb dimenzióban is konstruálni).

Az is világos, hogy *lineáris esetben* a hagyományos értelmű kontrollálhatóság *szükséges* feltétele a POBK-nak. Ugyanis ebben az esetben minden  $k$ -dik elérhetőségi halmaz egy affin altér, és ha ez  $n$  lépésszám után nem válik  $n$ -dimenzióssá (azaz a rendszer nem kontrollálható a hagyományos értelemben), akkor az elérhető állapotok halmaza nem adhatja ki a teljes  $\mathbb{R}_+^n$ -t (hiszen az  $n$ -dimenziós).

Bilineáris esetben már nem tudom belátni ezt a *szükségességét*, de lehet hogy nem nehéz (ha egyáltalán igaz...).

Megvizsgáltam a POBK-t lineáris rendszerek esetén (szerintem még ezt se vizsgálta senki az irodalomban, legalábbis semmit nem találtam).

Az első megjegyzés, hogy ha  $\mathbf{x}(0) \geq 0$ -ből egy  $\mathbf{x}_1 \geq 0$  elérhető, akkor az  $\mathbf{x}_1 + u\mathbf{b}$  egyenesnek a pozitív oktánsba eső darabja is elérhető (ez triviális). Tehát az elérhetőségi halmaz minden lépésben vagy üres (mint a fenti Példában), vagy  $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos olyan egyenes szakaszok (vagy félegyenesek) uniója, amelyek végpontjai a pozitív oktáns határain vannak. A kérdés az, hogy ezek az elérhetőségi halmazok mikor telítik be az egész  $\mathbb{R}_+^n$  oktánst, illetve fordítva, hogy mikor lehet üres egy elérhetőségi halmaz, vagy lehet-e nem üres és invariáns. Ezeket nem triviális megnézni.

Ismét a két-dimenziós esetet tudom karakterizálni:

**Tétel 3.2.** Tekintsük az  $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + u(k)\mathbf{b}$  lineáris rendszert.

(i) Tegyük fel, hogy  $\mathbf{b}$ -nek egyik koordinátája pozitív, másik negatív, azaz pl.  $\mathbf{b} = [m, p]^T$ ,  $m < 0$ ,  $p > 0$ . Ekkor a rendszer nem lehet POBEK. Továbbá a rendszer pontosan akkor POBGYK ha

a; az  $R_A = A\mathbb{R}_+^2$  nyílt szektor csak az origóban találkozik a  $\mathbf{b}$ -irányú egyenessel (tehát a  $\mathbf{b}$  irányú egyenes a szektoron kívül halad), és

b;  $[\mathbf{b}, A\mathbf{b}]$  rangja 2, és

c; az  $\mathbf{s}_1 := [-m, 0]$  és  $\mathbf{s}_2 := [0, p]$  pontokat összekötő ( $\mathbf{b}$  irányú) egyenes és az  $A\mathbf{s}_1$  és  $A\mathbf{s}_2$  pontokat összekötő egyenes az  $R_A$  szektoron belül metszik egymást.

(ii) Tegyük fel, hogy  $\mathbf{b}$  szigorúan pozitív (vagy, ami ezzel ekvivalens, szigorúan negatív). Ekkor a POBEK és POBGYK ekvivalensek, és pontosan akkor teljesülnek ha

a;  $[\mathbf{b}, \mathbf{Ab}]$  rangja 2, és

b;  $\mathbf{z}$ -vel jelölve azt a pozitív koordinátatengelyt (azaz  $\mathbf{z} = \mathbf{x}$  vagy  $\mathbf{z} = \mathbf{y}$ ), ami a  $\mathbf{b}$  irányú egyenes által meghatározott nyílt félsíkok közül ugyanarra esik, mint  $\mathbf{Ab}$ , az teljesül, hogy  $A\mathbf{z}$  a másik nyílt félsíkra esik.

(iii) Tegyük fel, hogy  $\mathbf{b}$ -ben van 0 koordináta; feltehető (esetleges változó permutálás után), hogy  $\mathbf{b} = [0, 1]^T$ . Ekkor a POBK-hoz szükséges, hogy  $a_{11} \geq 0$  és  $a_{12} > 0$ . Ha  $a_{11} > 0$ , akkor a rendszer nem lehet POBEK, és pontosan akkor POBGYK ha  $a_{11} < 1$ . Ha  $a_{11} = 0$ , akkor a rendszer POBEK.

*Bizonyítás.* Csak vázlatot adok.

Az (i) pont: legyen  $\mathbf{b} = [m, p]^T$  ahol  $m < 0$ ,  $p > 0$ . A rendszer nyilván nem lehet POBEK, mert az  $\mathbf{x}(0) = 0$ -ból indulva nem tudunk nemnegatív állapotba lépni.

Ha az  $R_A$  szektor tartalmazza  $\mathbf{b}$ -t vagy  $-\mathbf{b}$ -t, akkor van olyan  $\mathbf{x}(0) > 0$  állapot, amit  $\mathbf{b}$  irányú vektorba visz, és ekkor a kontrollal is csak  $\mathbf{x}(1) = c\mathbf{b}$  állapotba tudjuk juttatni a rendszert, ami csak akkor nemnegatív, ha  $c = 0$ , és így a rendszer nem POBGYK. Nyilván az is szükséges, hogy  $[\mathbf{b}, \mathbf{Ab}]^T$  rangja 2 legyen, a hagyományos kontrollálhatóság szükségessége miatt.

Tegyük tehát fel, hogy az  $R_A$  szektoron kívül fut a  $\mathbf{b}$  irányú egyenes, és a rang-feltétel is teljesül. Ekkor könnyű követni az elérhetőségi halmazokat (mindig egy  $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos alapú trapéz lesz az  $\mathbb{R}_+^2$ -on belül) és nem nehéz belátni, hogy ezek pontosan akkor telítik be az egész pozitív síknegyedét, ha a Tétel c; feltétele teljesül.

A (ii) pont: a rang-feltétel megint nyilván szükséges. Ha b; feltétel nem teljesül, akkor az  $S_{\mathbf{b}, \mathbf{z}}$  szektor rendszer-invariáns. Ha pedig mindkét feltétel teljesül, akkor könnyű belátni, hogy bármilyen  $\mathbf{x}(0) \geq 0$ -ból indulva a harmadik elérhetőségi halmaz már a teljes pozitív negyed.

A (iii) pont: nyilván szükséges, hogy  $a_{11}, a_{12} \geq 0$  különben az első koordináta negatívvá válhat, és azon a kontrollal nem tudunk segíteni; a rang-feltétel miatt az is szükséges, hogy  $a_{12}$  szigorúan pozitív. Ha  $a_{11} > 0$ , akkor az első koordináta nem válhat nullává, így a rendszer nem lehet POBEK. Ha  $a_{11} \geq 1$ , akkor az  $[1, 0]^T + \mathbb{R}_+^2$  eltolt negyed invariáns lesz. Különböző könnyű látni, hogy az elérhetőségi halmazok mindig  $[x_k, 0]^T + \mathbb{R}_+^2$  alakúak, ahol  $x_k$  tart nullához, így a rendszer POBGYK.

Ha pedig  $a_{11} = 0$ , akkor könnyű látni, hogy tetszőleges  $\mathbf{x}(0) \geq 0$  esetén a második elérhetőségi halmaz már a teljes zárt pozitív síknegyed.  $\square$

Itt is felsorolunk néhány nyitott problémát:

4. *Probléma.* Karakterizáljuk a lineáris esetben a POBK-t magasabb dimenziókban, vagy legalábbis adjunk nem-triviális elégséges ill. szükséges feltételeket.

5. *Probléma.* Karakterizáljuk a POBK-t 2-dimenziós bilineáris rendszerekre.

6. *Probléma.* Karakterizáljuk a POBK-t a bilineáris esetben magasabb dimenzióban, vagy legalábbis adjunk nem-triviális elégséges ill. szükséges feltételeket (esetleg növelve a kontroll változók számát  $m > 1$ -re).

## REFERENCES

- [1] A. Bacciotti, On the positive orthant controllability of two-dimensional bilinear systems, *Sys. Control Lett.*, 3: 53-55, 1983.

- [2] A. Berman, M. Neumann, R.Y. Stern, *Nonnegative Matrices in Dynamic Systems* (Wiley, New York, 1989).
- [3] W. M. Boothby, Some comments on positive orthant controllability of bilinear systems, *SIAM J. Control Optim.*, 20: 634-644, 1982.
- [4] L. Caccetta, V. Rumchev, "A survey of reachability and controllability for positive linear systems," *Annals of Operations Research*, vol. 98, pp 101-122, 2000.
- [5] P.G. Coxson, H. Shapiro, Positive input reachability and controllability of positive systems, *Linear Algebra and its Applications* 94 (1987) 35-53.
- [6] L. Farina, S. Rinaldi, *Positive linear systems: Theory and applications*. New York: Wiley, 2000.
- [7] Sachkov, Y. L. Controllability of bilinear systems with a scalar control in the positive orthant, (in Russian) *Mat. Zametki* 58 (1995), no. 3, 419-424; translation in *Math. Notes* 58 (1995), no. 3-4, 966-969 (1996).
- [8] Y. L. Sachkov, On positive orthant controllability of bilinear systems in small codimensions, *SIAM J. Control Opt.*, 35: 29-35, 1997.
- [9] T. J. Tarn, D.L. Elliott, T. Goka, Controllability of discrete bilinear systems with bounded control, *IEEE Trans. Aut. Control*, 18: 298-301, (1973).
- [10] M.E. Valcher, Controllability and reachability criteria for discrete-time positive systems, *International Journal of Control* 65(3) (1996) 511-536.