POZITÍV BILINEÁRIS RENDSZEREK IRÁNYÍTHATÓSÁGA

MTA-SZTAKI * KUTATÁSI JELENTÉS * 2006/5

MATOLCSI MÁTÉ, VARGA ISTVÁN

Abstract. A kutatási jelentés a pozitív bilineáris rendszerek irányíthatóságát mutatja be. Először számba veszi az időben folytonos rendszerekre meglévő tételeket, majd a diszkrét időinvariáns bilineáris rendszerek irányíthatóságát írja le két dimenzióban.

1. Folytonos idejű pozitív bilineáris rendszerek

Az irodalomban a pozitív bilineáris rendszerek elérhetőségével illetve írányíthatóságával kapcsolatban *csak* folytonos idejű rendszerekre vannak eredmények. Diszkrét idejű bilineáris rendszerekre csak egy-két eredmény található, de *nem* a pozitív esetre.

Egy folytonos idejű idő-invariáns homogén bilineáris rendszert az

$$\dot{\mathbf{x}} = (A + \sum_{i=1}^{m} u_i B_i)\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A, B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, u \in \mathbb{R} \tag{1}$$

egyenlet írja le.

Definíció 1.1. *Az* (1) *bilineáris rendszer pozitív ha minden* $\mathbf{x}(0) \geq 0$ *esetben bármely* $u(t)$ *kontroll mellett minden* $\mathbf{x}(t)$ *nemnegatív marad.*

Konnyű belátni a következő karakterizációt (lásd pl. [3], [8]):

Tétel 1.1. *Az* (1) *rendszer pontosan akkor pozitív, ha* A *Metzler matrix (azaz minden diagonálison kívüli eleme nemnegatív, a diagonálisban pedig bármi lehet) és minden* B_i *diagonális mátrix.*

A bilineáris rendszerek esetében egy origóból induló rendszer nem tudja elhagyni az origót, ezért az elérhetőség fogalma értelmetlenné válik, így természetes csak a rendszer írányíthatóságának vizsgálatára szorítkozni. A írányíthatóság vizsgálatánál pedig meg kellenne mondani, hogy milyen kezdőállapotokat engedunk meg, és milyen végállapotokat akarunk elérni. Az irodalomban [3] kezdte a írányíthatóság vizsgálatát, és ő még minden $\mathbf{x}(0) \geq 0$ nemnegatív vektorból akart elérni minden $\mathbf{x}_1 > 0$ szigorúan pozitívat, de aztán a későbbiekben [1] és [8] már csak $\mathbf{x}(0) > 0$ szigorúan pozitív kezdőállapotokat engedett meg. Látható, hogy kis zavar van az irodalomban, hogy mit is akarunk kontrollálhatóságnak nevezni, ezért maradjunk az utóbbinál:

Definíció 1.2. *Az* (1) *rendszer pozitívan irányítható, ha egyrészt pozitív, másrészt minden* $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}_1 > 0$ *pozitív vektorok esetén létezik olyan* $u(t)$ *kontroll függvény amely véges időben a rendszert* $\mathbf{x}(0)$*-ből* $\mathbf{x}_1$*-be viszi.*

A pozitív irányíthatóság elmélete itt egyáltalán nem olyan teljes mint a lineáris esetben. Bilineáris rendszerek esetében azonnal felmerül a kérdés, hogy hogyan változik a kontrollálhatóság a dimenzió (n) és a kontrollok száma (m) változtatásával. Nagyon kevés eredmény van: az első eredmények két dimenzióban [3]-ban találhatók, amelyeket [1] egészített ki, és így a két dimenziós eset teljes karakterizációját adta, amely a következő:

Tétel 1.2. *Tekintsük a* (1) *rendszert, ahol* $n = 2$, $m = 1$, *és tegyük fel, hogy:*

(A) A Metzler mátrix

(B) B diagonális mátrix b_1, b_2 *elemekkel a diagonálisban*

(C) $b1, b_2 \neq 0$

(D) $b_1 \neq b_2$

(E) $b_2 > 0$ *(ez feltehető az általánosság megszorítása nélkül, hiszen különben a* $-B$ *mátrixot tekintjük, és ugyanahhoz a kontroll problémához jutunk).*

Ekkor a következők igazak:

(i) Ha $b_1 > 0$, *akkor a* (1) *rendszer pozitívan kontrollálható.*

(ii) Ha $b_1 < 0$, *és* $(b_2a_{11} - b_1a_{22})^2 + 4b_1b_2a_{12}a_{21} > 0$, *valamint* $b_1a_{22} - b_2a_{11} > 0$, *akkor a* (1) *rendszer pozitívan kontrollálható.*

(iii) Minden más esetben a (1) *rendszer pozitívan nem kontrollálható.*

A két dimenziós eset vizsgalatán kívül Boothby [3]-ben a következő (triviális) eredményt adja az $n = m$ esetre:

Tétel 1.3. *Tekintsük a* (1) *rendszert, ahol* $n = m$ *es A Metzler mátrix,* B_i*-k pedig lineárisan független diagonális mátrixok. Ekkor a rendszer pozitívan kontrollálható. (Sőt, bármely két pozitív vektor bármilyen úton összeköthető egymással!)*

Ez a két tétel teljessé teszi az $n = 2$ eset vizsgálatát, hiszen ekkor csak $m = 1, 2$ jön szóba. (Nyilván ugyanis elég az $m \leq n$ esetre szorítkozni, hiszen ha a B_i-k nem függetlenek lineárisan, akkor az m csökkenthető néhány B_i elhagyásával.

Az $n > 2$ esetben elég kevés eredmény van (az utóbbi tétel persze arra is vonatkozik, de triviális.) Sachkov [7]-ben a következő tétellel megmutatta, hogy $n > 2$ esetben generikusan (azaz a "legtöbb esetben") egy kontrol-változó nem elég a pozitív kontrollálhatósághoz:

Tétel 1.4. *Tekintsük a* (1) *rendszert, ahol* $n > 2$, $m = 1$, *A Metzler és* $B = diag(b_i)$ *diagonális. Ekkor ha*

(i) $a_{1n} > 0, a_{n1} > 0$, *és* $a_{1j} + a_{nj} > 0$ *minden* $j = 2, 3, \dots n-1$ *esetben, továbbá* $b_1 < b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} < b_n$,

vagy

(ii) valamely $i < j$*-re* $b_i = b_j$ *és minden* $k \neq i$*-re* $a_{ik} > 0$ *vagy minden* $k \neq j$*-re* $a_{jk} > 0$, *akkor a rendszer nem pozitívan irányítható.*

Sachkov [8]-ben vizsgálja az $m = n - 1$ esetet, és a következő eredményeket kapja:

Tétel 1.5. *Legyen* $m = n - 1$, *A Metzler mátrix,* B_i*-k diagonálisak, és* $l = span(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ *(ahol a* B_i *mátrixokat a diagonálisban álló* $\mathbf{b}_i$ *vektorral reprezentáltuk). Legyen* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ *az* l *hipersíkra ortogonális nemnulla vektor, és tegyük fel, hogy* $\sum_{i=1}^n h_i \neq 0$. *Ekkor*

(i) Ha az A mátrix irreducibilis (azaz nincsen koordináta tengelyek által kifeszített nemtriviális invariáns altere), és a $\mathbf{h}$ *vektornak vannak ellentétes előjelű koordinátai, akkor a* (1) *rendszer pozitívan kontrollálható.*

(ii) Ha $h_i \geq 0$ *minden i-re, és* $\sum_{i=1}^n h_ia_{ii} \geq 0$ *akkor a* (1) *rendszer pozitívan nem kontrollálható.*

Abban az esetben pedig ha $\sum_{i=1}^n h_i = 0$ *a következő teljesül: a* (1) *rendszer pontosan akkor pozitívan kontrollálható, ha* $\mathbf{h}$*-nak létezik legalább kettő pozitív és negatív koordinátája egyaránt.*

Sachkov ezután (továbbra is [8]-ben erre a tételre alapozva ad nehány eredményt az $m = n-2$ illetve a tetszőleges $m < n$ esetekre.

Amint látható, jelenleg nincs teljes karakterizációja a folytonos bilineáris rendszerek pozitív kontrollálhatóságának.

2. Diszkrét idejű pozitív bilineáris rendszerek

Az irodalomban semmiféle ilyen eredményt nem található. Diszkrét (de nem pozitív) bilineáris rendszerek kontrollálhatóságáról létezik egy elégséges feltétel [9]-ban, ami a következő:

Tétel 2.1. *Az $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + u(k)B\mathbf{x}(k)$ rendszer kontrollálható $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-n, ha léteznek olyan N, M pozitív egészek, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-re*

(i) $\|A^N x\| = \|x\|$ (azaz A^N ortogonális leképezés)

(ii) $H_M(x) := [BA^{M-1}x, ABA^{M-2}x, \dots, A^{M-1}Bx]$ rangja n.

Ez elég speciális eset az (i) követelmény miatt. A kontrollálhatóság teljes karakterizációja nem ismert.

Tekintsük tehát az

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{m} u_i(k)B_i\mathbf{x}(k) \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad A, B_i \in \mathbb{R}^{n\times n}, u_i \in \mathbb{R} \tag{2}$$

diszkrét idejű homogén bilineáris rendszert. Ennek pozitivitását karakterizálja a következő állítás:

Tétel 2.2. *A* (2) *rendszerre a következők ekvivalensek:*

(i) Minden $\mathbf{x}(0) \geq 0$ kezdőállapot és minden $u_i(m) \geq 0$ ($m = 1, \dots, k$) nemnegatív kontroll esetén az $\mathbf{x}(k)$ állapot szintén nemnegatív

(ii) $A, B_i \geq 0$ elemenként

Bizonyítas. A (ii) $\to$ (i) irány világos. A másik irányhoz rögzítsük a kontrollok értékét az időtől függetlenül $u_i(k) = c_i$ értékkel. Ekkor egy állandó együtthatós differencia-egyenletet kapunk: $\mathbf{x}(k+1) = (A + \sum_{i=1}^{m} c_iB_i)x(k)$. Ennek pozitivitása ekvivalens (triviálisan, és egyebként jól ismert módon a pozitív lineáris elméletből) azzal, hogy az $D := A + \sum_{i=1}^{m} c_iB_i$ mátrix nemnegatív elemű. Ha A-nak lenne negatív eleme, akkor a $c_i = 0$ választással D-nek is lenne. Ha valamelyik B_i-nek lenne negatív eleme akkor az adott c_i-t nagyra választva, a többit pedig lenullázva szintén elérhető lenne, hogy D-nek legyen negatív eleme. Tehat D csak akkor lesz minden nemnegatív c_i választás mellet nemnegatív, ha A és minden B_i nemnegatív. $\square$

Most bevezetjük a kontrollálhatóság erős es gyenge definícióját, majd $n = 2$ dimenzióban karakterizáljuk is azokat. Természetesen az origóból induló rendszerek diszkrét bilineáris esetben is az origóban maradnak, így az elérhetőség vizsgálatának nincs értelme. A kontrollálhatóságot vizsgálhatjuk az összes nemnulla nemnegatív vektorra, vagy csak a szigorúan pozitív vektorokra.

Definíció 2.1. *Az $(A, B_i \geq 0)$ mátrixok által megadott bilineáris rendszert erősen pozitívan irányíthatónak nevezzük ha minden $\mathbf{x}(0) \geq 0$, $\mathbf{x}(0) \neq 0$ kezdőállapot és minden $\mathbf{x}_1 \geq 0$, $\mathbf{x}_1 \neq 0$ vektor esetén van olyan véges nemnegatív kontroll-sorozat, amely $\mathbf{x}(0)$-t átviszi $\mathbf{x}_1$-be.*

Az $(A, B_i \geq 0)$ mátrixok által megadott bilineáris rendszert gyengén pozitívan irányíthatónak nevezzük ha minden $\mathbf{x}(0) > 0$ kezdőallapot és minden $\mathbf{x}_1 > 0$ vektor esetén van olyan véges nemnegatív kontroll-sorozat, amely $\mathbf{x}(0)$-t átviszi $\mathbf{x}_1$-be.

Most megvizsgáljuk az erős kontrollálhatóság feltételeit $n = 2$ dimenzióban $m = 1$ kontroll változó esetén. A feltételek azon az egyszerű észrevételen alapulnak, hogy a pozitív koordináták nemnegatív input mellett 'nehezen' válhatnak nullává.

Tétel 2.3. *Az $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + u(k)B\mathbf{x}(k)$, $(A, B) \geq 0)$ mátrixok által megadott $n = 2$ dimenziós bilineáris rendszer pontosan akkor erősen pozitívan irányítható, ha (a változók esetleges permutálása után) A és B a következő alakú:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ es } B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \text{ ahol } a_{12} > 0 \text{ es } b_{21} > 0,\ b_{22} > 0, \text{ es } b_{12} \geq 0.$$

Bizonyítás. Először a szükségességet látjuk be. Ha az $\mathbf{x}(0)$ kezdőállapot mindkét koordinátája pozitív, és A-nak nincs csupa 0 sora, akkor nyilvánvaló, hogy minden $\mathbf{x}(k)$-nak is mindkét koordinátája pozitív marad, így a rendszer nem lehet erősen irányítható (mert nem nullázódhat le egyik koordináta sem). Tehát A egyik sora csupa 0, és feltehető (a változók esetleges permutálása után), hogy ez A második sora. Ha $a_{11} > 0$, és az $\mathbf{x}(0)$ kezdőállapot első koordinátája x_0 pozitív, akkor minden k-ra $\mathbf{x}(k)$ első koordinátája legalább $a_{11}^k x_0$, azaz nem válhat nullává, tehát a rendszer nem erősen irányítható. Tehát szükséges, hogy $a_{11} = 0$. Nyilván ha $a_{12} = 0$, akkor $A = 0$, és a rendszer nem irányítható, így $a_{12} > 0$ szükséges. Tehát A a kívánt alakú.

A továbbiakban bevezetjük azt a 'szektor-analízis' módszert, amellyel a irányíthatóság hatékonyan vizsgálható. Jelölésben, ha $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ nemnegatív vektorok, akkor $S_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$ fogja jelölni az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ által kifeszített szektort (kúpot) a pozitív negyedben. A koordináta-tengelyeket $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ fogja jelölni.

Jelölje $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ a B mátrix két oszlopát. Ha b_{11} és b_{12} egyike sem nulla, akkor tekintsük $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ közül a nagyobb meredekségűt, legyen ez $\mathbf{e}$. Ekkor az $S = S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns, így a rendszer nem kontrollálható. Az S szektor invariancián azt értjük, hogy ha $\mathbf{x}(k) \in S$ akkor $\mathbf{x}(k+1) \in S$. Ez pedig világos, hiszen $A\mathbf{x}(k)$ az $\mathbf{x}$-tengelyre esik, míg $u(k)B\mathbf{x}(k)$ nem lehet meredekebb mint $\mathbf{e}$. Tehát ha a rendszer S-ből indul akkor S-ben is marad, így nem irányítható. Tehát szükséges, hogy b_{11} és b_{12} valamelyike 0 legyen.

Ha $b_{11} \neq 0$, akkor az $\mathbf{y}$ tengely elhagyásával keletkező $F := \mathbb{R}_+^2 \setminus \mathbf{y}$ félig nyílt pozitív negyed lesz rendszer-invariáns, tehát az $\mathbf{y}$ tengely F-bol nem érhető el, így a rendszer nem erősen irányítható. Tehát $b_{11} = 0$ szükséges. Nyilván ezután $b_{21} > 0$ szükséges, különben a rendszer 'nilpotens', azaz az $\mathbf{x}$ tengelyt az origóba képzi, így nem irányítható. Továbbá $b_{22} > 0$ szintén szükséges, hiszen $b_{22} = 0$ esetén a két tengely uniója invariáns halmaz lenne.

Ezzel a szükségességet beláttuk. Az elégségesség belátásához ismét a szektor-analízist hívjuk segítsegül. Megvizsgáljuk, hogy hogyan változik az $\mathbf{x}(0)$-ből elérhető vektorok halmaza a k lépésszám növelésével. Tegyük fel, hogy valamely k-ra egy teljes $S_k := S_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$ szektor elérhető $\mathbf{x}(0)$-ből. Könnyen látható, hogy ekkor az S_{k+1} elérhetőségi halmaz az $A\mathbf{e}, A\mathbf{f}, B\mathbf{e}, B\mathbf{f}$ vektorok által kifeszített szektor lesz (azaz a négy vektor közül a legnagyobb meredekségű és a legkisebb meredekségű közé eső szektor). Ezzel az észrevétellel már meg tudjuk mutatni a rendszer erős irányíthatóságát.

Feltehető, hogy $\mathbf{x}(0)$ az $\mathbf{x}$ tengelyen van (máskülönben A egyszeri alkalmazásával és $u(1) = 0$ irányít oda jutunk). Ekkor az S_1 elérhetőségi halmaz az A es B alakjából adódóan a teljes $\mathbf{y}$-tengely lesz. Az S_2 második elérhetőségi halmaz az $\mathbf{x}$-tengely és a B második oszlopvektora által kifeszített $S_{\mathbf{x},\mathbf{b}_2}$ szektor. Mivel B az $\mathbf{x}$-tengelyt átviszi az $\mathbf{y}$-tengelybe, és A a $\mathbf{b}_2$ vektort (mint minden egyenest) az $\mathbf{x}$-tengelyre képzi, ezért a harmadik elérhetőségi halmaz a teljes $\mathbb{R}_+^2$, így a rendszer kontrollálható. Sőt, azt is beláttuk, hogy tetszőleges $\mathbf{x}(0) \geq 0$ vektor *legfeljebb 4 lépés alatt* átvihető tetszőleges $\mathbf{x}_1 \geq 0$ vektorba (azért négy, mert az elején feltettük, hogy az $\mathbf{x}$-tengelyről indulunk, és valójában az odajutás is egy lépesbe kerülhet). $\square$

Tétel 2.4. *Az $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + u(k)B\mathbf{x}(k)$, $(A, B) \geq 0)$ mátrixok által megadott n-dimenziós bilineáris rendszer erősen pozitívan irányítható, ha (a változók esetleges permutálása után) A és B a következő alakú:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad es\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix},$$

ahol a $*$-gal jelölt elemek szigorúan pozitívak.

Bizonyítás. Tegyük fel először az egyszerűség kedvéért, hogy A-ban a $*$-ok helyén csak 1-ek állnak. Vegyük észre, hogy ekkor A hatása az, hogy minden koordinátát eggyel feljebb tol, míg az utolsó helyre 0-t rak. B pedig a koordináták súlyozott összegét teszi az utolsó helyre, a többi helyre 0-t. Ezekből könnyen következik, hogy tetszőleges $\mathbf{x}(0) \geq 0$ nemnulla vektorból legfeljebb n lépésben elérhetünk egy olyan $\mathbf{x}(n)$ vektort amelynek minden koordinátája pozitív (hiszen B alakalmazásával az utolsó helyre mindig pozitív kerül, és A azt tologatja feljebb). Ezután már minden koordinátát be tudunk állítani a kívánt értékre (az, hogy először olyan vektorba megyünk aminek minden koordinátája pozitív, az csak egy technikai lépés, hogy a koordinatánkénti beállításnál ne legyen baj az esetleges 0-val osztással). Tegyük fel, hogy az elérendő végállapot $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n]^T$. Ekkor $\mathbf{x}(n+1)$ utolsó koordinátáját nyilván be tudjuk állítani megfelelő irányít z_1-re. Azután $\mathbf{x}_{n+2}$ utolsó koordinátáját z_2-re, miközben $\mathbf{x}(n+2)$ utolsó előtti koordinátája A hatása miatt automatikusan z_1 lesz. Így koordinátánként lépkedve elérjuk a kívánt $\mathbf{z}$ vektort.

Ha A-ban nem csak 1-ek állnak, akkor is ugyanígy járunk el csak értelemszerűen a z_i koordináták megfelelő többszöröseit állítjuk be B-vel, hiszen figyelni kell arra, hogy A hatása alatt azok még szorzódni fognak a megfelelő A-beli elemekkel. $\square$

Most ráterunk a gyenge kontrollálhatóság vizsgálatára $n = 2$ dimenzióban. Először egy általános megjegyzést teszünk, amely bármely dimenzióban igaz. Az $\mathbb{R}^n_+$ zárt pozitív ortáns nyilván invariáns halmaza a rendszerünknek. Vegyük észre, hogy a rendszer pontosan akkor gyengén irányítható, ha 'lényegében' nincs is más rendszer-invariáns halmaz. Pontosabban: *az $(A, B_i \geq 0)$ mátrixok által adott* (2) *diszkrét bilineáris rendszer pontosan akkor gyengén kontrollálható, ha minden $\mathbb{R}^n_+$-beli rendszer-invariáns halmaz vagy tartalmazza a nyílt $int\mathbb{R}^n_+$ ortánst, vagy diszjunkt attól.* Szükségesség: ha lenne H invariáns halmaz, ami tartalmazza $\mathbf{x} > 0$ vektort, de nem tartalmazza az egész nyílt $int\mathbb{R}^n_+$ ortánst, akkor nyilván $\mathbf{x}$-ből nem lehet H-n kívüli vektorokat elérni. Elégségesség: tetszőleges $\mathbf{x} > 0$ esetén tekintsük az $A(\mathbf{x})$ elérhetőségi halmazt, azaz azon nemnegatív vektorok halmazat, amelyek $\mathbf{x}$-ből véges időben elérhetők. Triviális, hogy $A(\mathbf{x})$ rendszer-invariáns halmaz. Így feltétel szerint $A(\mathbf{x})$ tartalmazza az egész $int\mathbb{R}^n_+$ nyílt ortánst (hiszen diszjunkt nem lehet tőle, mert $\mathbf{x} \in A(\mathbf{x})$). Tehát a kontrollálhatóság eldöntéséhez elég eldönteni, hogy van-e nem-triviális rendszer-invariáns halmaz. Más kérdés, hogy ezt eldönteni általában nem könnyű, de két dimenzióban még lehetséges.

A fenti megjegyzés azonnali következményeként a következő hasznos észrevételt tesszük: az A és B mátrixok az $\mathbb{R}^2_+$ halmazt valamely S_A és S_B (esetleg elfajuló) szektrokba viszik, amelyeknek határai az A ill. B oszlopai. Ezek uniójának konvex burka (azaz a legnagyobb és legkisebb meredekségű határoló vektorok közé eső szektor) egy rendszer-invariáns S szektor. Valóban, ha $\mathbf{x}(0) \in S$ akkor minden $\mathbf{x}(k) \in S$, triviálisan. Tehat azt kaptuk, hogy $S = \mathbb{R}_+^2$ szükséges a gyenge irányíthatósaghoz. Erre a feltételre úgy fogunk később hivatkozni, mint az 'értékszektor feltétel'.

A másik egyszerű észrevétel, hogy A aszimptotikusan stabil kell legyen, azaz a Frobenius sajátértéke kisebb mint 1. Ellenkező esetben ugyanis $\mathbf{x}(0)$-t a Frobenius sajátértékhez tartozó nemnegatív sajátvektornak választva az origó közeli állapotok nem lesznek elérhetőek. Erre feltételre mint 'sajátérték feltétel' fogunk hivatkozni.

Elöljáróban azt mondhatjuk, hogy a gyenge kontrollálhatóság $n = 2$ dimenzióban az A, B mátrixok sajátértekeinek nagyságától, és a mátrixokban elhelyezkedő nullák helyzetétől függ. Mivel nagyon sok gyengén kontrollálható és nem gyengén kontrollálható eset van, az A-ban szereplő nullák száma és elhelyezkedése szerint vizsgáljuk az eseteket: Legjobb lenne nehány esetet ábrával illusztrálni, bejelölve a nem gyengén irányítható esetekben az invariáns halmazokat, és a gyengén irányítható esetekben az elérhetőségi halmazok növekedését, ahogy lépésenként kitöltik az egész $\mathbb{R}_+^2$-t.

Az alábbi esetek vizsgálatánál a nem gyengén kontrollálható eseteknél mindig odaírjuk az invariáns halamazt, amely mutatja a nem-kontrollálhatóságot. A irányítható eseteket pedig mindig kiemeljük külön tételként. Csak egy esetben adunk bizonyítást, a többi is hasonlóan megy.

1. eset: A-ban nincs nulla.

Ekkor az S_A szektor határai $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ a pozitív negyed belsejébe esnek (mondjuk legyen $\mathbf{a}_1$ a kisebb meredekségű határ), így az értékszektor feltétel miatt szükséges hogy $S_B = \mathbb{R}_+^2$ legyen. Ez csak akkor lehet, ha $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ vagy $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$. Nyilván feltehető, hogy $b_2 \geq b_1$. Az első esetben az $S_{\mathbf{a}_1,\mathbf{y}}$ szektor invariáns halmaz. A második esetben legyen $\mathbf{e}$ olyan $\mathbf{a}_1$-nel kisebb meredekségű irány, hogy $B\mathbf{e}$ már $\mathbf{a}_2$-nél nagyobb meredekségű. Ekkor az $S_{\mathbf{e},B\mathbf{e}}$ szektor invariáns. Tehát a rendszer nem lehet gyengén irányítható.

---

2. eset: A-ban 1 nulla van.

Feltehető (a változok esetleges permutálása után), hogy a nulla az alsó sorban van. Ekkor két lehetőség van:

2.a. $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}$.

A sajatérték feltétel miatt $a_1, a_3 < 1$. Az értékszektor feltétel miatt B egyik oszlopa $\mathbf{y}$ irányú kell, hogy legyen. Ismét két lehetőség van:

2.a.I. $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ekkor, ha $a_1 \geq a_3$ és $b_1 > p$ (vagy $b_1 = p$ és $b_2 = 0$), akkor B-nek van egy $\mathbf{y}$-tól eltérő $\mathbf{s}_B$ pozitív sajátvektora, és az $S_{\mathbf{x},\mathbf{s}_B}$ szektor invariáns (ha $b_2 = 0$, akkor persze $\mathbf{s}_B = \mathbf{x}$, de ekkor tetszőleges $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns). Ha $a_3 > a_1$, akkor A-nak van egy $\mathbf{x}$-től eltérő $\mathbf{s}_A$ pozitív sajátvektora, és ekkor $p \geq b_1$ esetén az $S_{\mathbf{s}_A,\mathbf{y}}$ szektor, míg $p < b_1$ esetén az $S_{\mathbf{s}_A,\mathbf{s}_B}$ szektor lesz invariáns. A fennmaradó esetben a rendszer gyengén kontrollálható, azaz

Tétel 2.5. *Legyenek A és B a fenti alakúak, $p > 0$, $a_1, a_3 < 1$, és $a_1 \geq a_3$. Ha $b_1 = p$, $b_2 > 0$, VAGY $b_1 < p$, $b_2 \geq 0$ (itt $b_2 = 0$ is lehet!), akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

2.a.II. $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ekkor, ha $a_3 > a_1$ akkor A-nak van egy $\mathbf{x}$-től eltérő $\mathbf{s}_A$ pozitív sajátvektora, és az $S_{\mathbf{s}_A, B\mathbf{s}_A}$ szektor invariáns. Más esetekben pedig:

Tétel 2.6. *Legyenek A és B a fenti alakúak, $p > 0$, $a_1, a_3 < 1$, és $a_1 \geq a_3$. Ekkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

2.b. $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix}$.

A sajátérték feltétel miatt $a_1 < 1$. Az értékszektor feltétel miatt B egyik oszlopa $\mathbf{y}$ iranyú kell, hogy legyen. Továbbá vegyük észre, hogy A-nak létezik egy pozitív $\mathbf{s}_A$ sajátvektora. B-re ismét két lehetőség van:

2.b.I. $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ha itt $b_1 > p$ (vagy $b_1 = p$ és $b_2 = 0$), akkor B-nek van egy $\mathbf{y}$-tól eltérő $\mathbf{s}_B$ pozitív sajátvektora. Legyen $\mathbf{e}$ olyan vektor amely meredekebb $\mathbf{s}_B$-nél és A első oszlopánál. Ekkor $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ invariáns. A további esetben pedig:

Tétel 2.7. *Legyenek A és B a fenti alakúak, $p > 0$, $a_1 < 1$. Ha $b_1 = p$, $b_2 > 0$, VAGY $b_1 < p$, $b_2 \geq 0$ (itt $b_2 = 0$ is lehet!), akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

2.b.II. $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ennek az esetnek a tárgyalasa nem triviális. Először is könnyű belátni, hogy ha $b_1 = 0$ akkor a rendszer gyengén irányítható. Tegyük fel tehát, hogy $b_1 > 0$. Ha létezik olyan $\mathbf{e} > 0$ vektor, amelyre $A\mathbf{e} = cB\mathbf{e}$ valamely c-re, akkor az $S_{\mathbf{e},A\mathbf{e}}$ szektor rendszerinvariáns. Ilyen $\mathbf{e}$ vektor létezése a következővel ekvivalens: tekintsük a $-pb_1c^2 + (pa_2 + a_3b_1 - a_1b_2)c - a_2a_3 = 0$ egyenlet nemnegatív c gyökét (ha van nemnegatív gyök; ez az egyenlet egyébként azt írja le, hogy az $A - cB$ mátrix determinánsa 0), és ha ezzel a c-vel $a_2 - cb_1 < 0$, akkor létezik alkalmas $\mathbf{e} = [cb_1 - a_2, a_1]^T$ vektor. Máskülönben nem létezik alkalmas $\mathbf{e}$ vektor. Ha azt kaptuk, hogy nincs megfelelő $\mathbf{e}$ vektor, akkor az következik, hogy $B\mathbf{e}$ mindig nagyobb meredekségű, mint $A\mathbf{e}$. Tekintsük most a $BA = \begin{bmatrix} a_3b_1 & 0 \\ pa_1 + a_3b_2 & pa_2 \end{bmatrix}$ mátrixot. Ha itt $pa_2 < a_3b_1$, akkor BA-nak létezik nem $\mathbf{y}$ irányú pozitív sajátvektora, $\mathbf{s}_{BA}$. Legyen ekkor $\mathbf{f}$ olyan irány, amely $\mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B, \mathbf{s}_{BA}$ mindegyikénél nagyobb meredekségű. Ekkor az $S_{\mathbf{f},A\mathbf{f}}$ szektor invariáns (mert: $\mathbf{f}$ meredekebb mint $A\mathbf{f}$ es $B\mathbf{f}$ (mert A es B 'áttükrözi' $\mathbf{f}$-et $\mathbf{s}_A$-n ill. $\mathbf{s}_B$-n), és $B\mathbf{f}$ meredekebb mint $A\mathbf{f}$ (mert ez minden irányra igaz), és végül $BA\mathbf{f}$ kevésbé meredek mint $\mathbf{f}$ (mert BA az $\mathbf{f}$-et közelíti $\mathbf{s}_{BA}$-hoz)). Egyéb esetekben a rendszer gyengén irányítható, azaz:

Tétel 2.8. *Legyenek A és B a fenti alakúak, $p > 0$, $a_1 < 1$. Ha itt $b_1 = 0$ VAGY $b_1 > 0$ és $-pb_1c^2 + (pa_2 + a_3b_1 - a_1b_2)c - a_2a_3 = 0$ egyenlet nemnegatív c gyökére teljesül, hogy $a_2 - cb_1 \geq 0$, továbbá $pa_2 \geq a_3b_1$, akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

---

3. eset: A-ban 2 nulla van.

Feltehető (a változók esetleges permutálása után), hogy legalább az egyik nulla az alsó sorban van. Ekkor három lehetőség van:

3.a. $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A sajátérték feltétel miatt $a_1 < 1$. Az értékszektor feltétel miatt B egyik oszlopa $\mathbf{y}$ iranyú kell, hogy legyen. Ismét két lehetőség van:

3.a.I. $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ha $b_1 > p$, akkor B-nek van egy $\mathbf{y}$-tól különböző irányú nemnegatív $\mathbf{s}$ sajátvektora, és az $S_{\mathbf{x},\mathbf{s}}$ szektor invariáns, igy a rendszer nem irányítható (külön kell nézni a $b_2 = 0$ esetet, mert ekkor $\mathbf{s} = \mathbf{x}$, de ilyenkor tetszőleges $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns). Ha $b_1 = p$ és $b_2 = 0$, akkor B az identitás mátrix többszöröse, és tetszőleges $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns. A további esetek gyengén irányíthatóak, azaz:

Tétel 2.9. *Ha A és B a fenti alakúak, $p > 0$, $a_1 < 1$, es $b_1 = p$, $b_2 > 0$, VAGY $b_1 < p$, $b_2 \geq 0$ (itt $b_2 = 0$ is lehet!), akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

3.a.II. $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ekkor b_1, b_2 értékétől függetlenül (persze nemnegatívak, mint minden elem!) a rendszer gyengén kontrollálható:

Tétel 2.10. *Ha A és B a fenti alakúak, és $p > 0$, akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

3.b. $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$. Itt feltehetjük (esetleges változó permutálás után), hogy $a_1 > a_2$. A sajátérték feltétel miatt $a_1, a_2 < 1$ szükséges. Ha az S_B szektor nem tartalmazza az $\mathbf{y}$-tengelyt, akkor az S_B szektor felső határegyenesét $\mathbf{e}$-vel jelölve az $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns. Tehát szükséges, hogy B egyik oszlopa $\mathbf{y}$ iranyú legyen. Ismét két lehetőség van:

3.b.I. $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ha $b_1 > p$, akkor létezik B-nek egy $\mathbf{y}$-tól különböző irányú nemnegatív $\mathbf{s}$ sajátvektora, és az $S_{\mathbf{x},\mathbf{s}}$ szektor invariáns, így a rendszer nem irányítható (külön kell nézni a $b_2 = 0$ esetet, mert ekkor $\mathbf{s} = \mathbf{x}$, de ilyenkor tetszőleges $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns). Ha $b_1 = p$ és $b_2 = 0$, akkor B az identitás mátrix többszöröse, és tetszőleges $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns. A maradék esetben a rendszer gyengén irányítható lesz, amit összefoglalva:

Tétel 2.11. *Ha A és B a fenti alakúak, $a_1, a_2 < 1$, $p > 0$, és $p > b_1$, VAGY $p = b_1$ és $b_2 > 0$, akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

3.b.II. $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ha itt $b_1 = 0$ akkor az első koordinátát nem tudjuk irányítani, tehát szükséges, hogy $b_1 > 0$. További feltétel nincs, azaz:

Tétel 2.12. *Ha A és B a fenti alakúak, $a_1, a_2 < 1$, $p, b_1 > 0$, akkor a rendszer gyengén irányítható.*

3.c. $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix}$. Itt a sajátérték feltétel miatt $a_1 \cdot a_2 < 1$ szükséges. Ha S_B egyik tengelyt sem tartalmazza, akkor tekintsünk egy olyan $\mathbf{e}$ irányt, amelynek meredeksége kisebb S_B alsó határegyenesénél, és $A\mathbf{e}$ meredeksége nagyobb S_B felső hataregyenesénél. Ekkor az $S_{\mathbf{e},A\mathbf{e}}$ szektor invariáns. Feltehető tehát (esetleges változó permutálás után), hogy B egyik oszlopa $\mathbf{y}$ iranyú. Ismét két lehetőség van:

3.c.I. $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ha itt $b_1 > p$ és $b_2 > 0$, akkor B-nek van egy tengelyektől eltérő irányú pozitív $\mathbf{s}$ sajátvektora. Legyen $\mathbf{e}$ olyan $\mathbf{s}$-nél kisebb meredekségű irány, hogy $A\mathbf{e}$ már $\mathbf{s}$-nél nagyobb meredekségű. Ekkor az $S_{\mathbf{e},A\mathbf{e}}$ szektor invariáns. Ha $b_1 = p$ és $b_2 = 0$, akkor pedig az A mátrix sajátvektora rendszer-invariáns irány. A további esetek gyengén kontrollálhatóak, azaz:

Tétel 2.13. *Legyenek A és B a fenti alakúak, $a_1 \cdot a_2 < 1$, $p > 0$. Ha $p > b_1$ VAGY $p = b_1$ és $b_2 > 0$, VAGY $p < b_1$ és $b_2 = 0$, akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

3.c.II. $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Tegyük fel először, hogy $b_1, b_2 > 0$. Ekkor létezik olyan $c > 0$, amellyel $cb_1 = a_1$. Ha most $cp - a_2 < 0$, akkor az $\mathbf{e} := [cb2, a_2 - cp]^T$ pozitív vektort A és cB ugyanoda képezi, és így az $S_{\mathbf{e},A\mathbf{e}}$ szektor rendszer-invariáns. Ha b_1 vagy b_2 értékét 0-nak is megengedjük, akkor $b_2 = 0$ esetén az $a_1/a_2 = b_1/p$ esetben $A = cB$ így a rendszer nem gyengén kontrollálható. Minden más esetben a rendszer gyengén kontrollálható, azaz:

Tétel 2.14. *Legyenek A és B a fenti alakuak, $a_1 \cdot a_2 < 1$, $p > 0$. Ha $b_1 = 0$ VAGY $b_2 = 0$ és $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{p}$ VAGY $b_1, b_2 > 0$ és $\frac{a_1}{b_1}p - a_2 \geq 0$ akkor a rendszer gyengén irányítható.*

---

4. eset: A-ban 3 nulla van.

Feltehető (a változók esetleges permutálása után), hogy a nem nulla elem a felső sorban van. Ekkor két lehetőség van:

4.a. $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A sajátérték feltétel miatt $a < 1$. Az értékszektor feltétel miatt B egyik oszlop $\mathbf{y}$ irányú kell, hogy legyen. Ismét két lehetőség van:

4.a.I. $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ha itt $b_1 = 0$ akkor az első koordinátát nem tudjuk irányítani, tehát feltehető, hogy $b_1 > 0$. Ha $b_1 > p$, akkor B-nek van egy $\mathbf{y}$-tól különböző irányú nemnegatív $\mathbf{s}$ sajátvektora, és az $S_{\mathbf{x},\mathbf{s}}$ szektor invariáns, így a rendszer nem irányítható (külön kell nézni a $b_2 = 0$ esetet, mert ekkor $\mathbf{s} = \mathbf{x}$, de ilyenkor tetszőleges $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns). Ha $b_1 = p$ és $b_2 = 0$, akkor B az identitás mátrix többszöröse, és tetszőleges $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns. A maradék esetben a rendszer gyengén irányítható lesz, amit összefoglalva:

Tétel 2.15. *Ha A és B a fenti alakúak, $p > 0$, $a < 1$, és $b_1 = p$, $b_2 > 0$, VAGY $b_1 < p$, $b_2 \geq 0$ (itt $b_2 = 0$ is lehet!), akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

Bizonyítás. Az összes gyengen irányítható eset bizonyítasa ugyanúgy megy: az ember belátja, hogy az elérhetőségi halmaz lépésenként kitölti az egész $\mathbb{R}^2_+$-t. Itt most ezt leírom, de a többi esetben csak a gyenge kontrollálhatóság tényét fogom közölni bizonyítás nélkül. Ha szerinted szükség van rá, akkor persze utólag le tudom írni az összes eset bizonyítását. Szerintem csak unalmassá teszi a tárgyalást...

Legyen tehát $\mathbf{x}(0) = [x, y]^T > 0$. Belátjuk, hogy $A(\mathbf{x}) \supset int\mathbb{R}^2+$. Jelölje $\mathbf{e}$ a B első oszlopát, és először tegyük fel, hogy $b_2 > 0$. Az $u(1) = 0$ irányít az $\mathbf{x}$-tengelyre jutunk az $[ax, 0]^T$ pontba. Ezután tetszőleges $[a^2x, 0]^T + u(2)\mathbf{e}$ pontba juthatunk, tehát egy $[a^2, 0]$-ból induló félegyenest teljesen elérhetünk. Ezután $u(3) = 0$-val az $\mathbf{x}$-tengely egész a^3x-nél nagyobb-egyenlő része elérhető. Így lépésenként az egész nyílt $\mathbf{x}$-tengely bármely pontja elérhető véges lépésben (hiszen $a^n x$ 0-hoz tart). Ezután tetszőleges $[z, 0]^T + u\mathbf{e}$ pont elérhető, azaz, a teljes félig nyílt $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor. Az $S_1 = S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor A és B általi képet tekintve láthatjuk, hogy az S_1 pontjaiból egy lépésben elérhetőek az $S_2 = S_{\mathbf{x},B\mathbf{e}}$ pontjai. Azután pedig az $S_3 = S_{\mathbf{x},B^2\mathbf{e}}$ pontjai. És kihasználva, hogy $B^n\mathbf{e}$ a feltételek miatt az $\mathbf{y}$-tengelyhez tart készen is vagyunk.

A $b_2 = 0$, $b_1 < p$ eset bizonyítása is teljesen hasonló, csak ebben az esetben nem szabad az első lépésben lemenni az $\mathbf{x}$-tengelyre mert az invariáns halmaz, és nem lehet elhagyni.

Ehelyett $u(1) = \varepsilon$-nal a második koordinátát pozitívan kell tartani. Egyébként ugyanúgy megy. □

4.a.II. $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ha itt $b_1 = 0$ akkor az első koordinátát nem tudjuk irányítani, tehát feltehető, hogy $b_1 > 0$. Minden más eset kontrollálható, azaz

Tétel 2.16. *Ha A és B a fenti alakúak, $p > 0$, $a < 1$, és $b_1 > 0$, akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

4.b. $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Most $a > 1$ is megengedett. Az értékszektor feltétel miatt B egyik oszlop $\mathbf{y}$ iranyú kell, hogy legyen. Ismét két lehetőség van:

4.b.I. $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & p \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ha $b_1 > p$, akkor létezik B-nek egy $\mathbf{y}$-tól különböző irányú nemnegatív $\mathbf{s}$ sajátvektora, és az $S_{\mathbf{x},\mathbf{s}}$ szektor invariáns, így a rendszer nem irányítható (külön kell nézni a $b_2 = 0$ esetet, mert ekkor $\mathbf{s} = \mathbf{x}$, de ilyenkor tetszőleges $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns). Ha $b_1 = p$ és $b_2 = 0$, akkor B az identitás mátrix többszöröse, és tetszőleges $S_{\mathbf{x},\mathbf{e}}$ szektor invariáns. A maradék esetben a rendszer gyengén irányítható lesz, amit összefoglalva:

Tétel 2.17. *Ha A és B a fenti alakúak, $p > 0$, és $p > b_1$, VAGY $p = b_1$ és $b_2 > 0$, akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

4.b.II. $B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ p & b_2 \end{bmatrix}$, ahol $p > 0$. Ekkor b_1, b_2 értékétől függetlenül a rendszer gyengén kontrollálható:

Tétel 2.18. *Ha A és B a fenti alakúak, és $p > 0$, akkor a rendszer gyengén kontrollálható.*

---

5. eset: A-ban 4 nulla van.

Ekkor $A = 0$, és a rendszer nyilván nem irányítható.

Ezzel a gyenge irányíthatóság karakterizációját $n = 2$ dimenzióban befejeztük.

Felsorolunk nehány nyitott kérdést ami jövőbeni kutatás tárgyát képezheti:

1. Probléma. Karakterizáljuk a pozitív diszkrét bilineáris rendszerek irányíthatóságát $n > 2$ dimenzióban, vagy legalábbis adjunk könnyen ellenőrizhető szükséges illetve elégséges feltételeket.

2. Probléma. Vizsgáljuk meg a pozitív irányíthatóságot az $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{m} u_i(k)B_i\mathbf{x}(k)$ rendszer esetén, ha $m > 1$.

3. Probléma. Vizsgáljuk a pozitív irányíthatóságot $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{m} u_i(k)B_i\mathbf{x}(k) + v(k)\mathbf{b}$ inhomogén rendszer esetében.

3. Irányíthatóság a pozitív oktánson belül

Ez az amit Szabó Zoli javasolt, hogy hogyan enyhítsük a pozitív kontrollálhatóság definícióját. Erről semmi sincs az irodalomban. Egy kevés saját eredményem van:

Definíció 3.1. *Egy lineáris (??) vagy bilineáris (2) rendszert a pozitív oktánson belül erősen irányíthatónak nevezünk, ha a rendszer nem feltétlenül pozitív, de minden $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}_1 \geq 0$ nemnegatív állapotokhoz létezik olyan véges kontroll sorozat, amely $\mathbf{x}(0)$-t átviszi $\mathbf{x}_1$-be miközben* *minden közbülső* $\mathbf{x}_k$ *állapot nemnegatív marad (a bilineáris esetben nyilván* $\mathbf{x}(0) \neq 0$ *is fel kell tenni).*

A rendszer a pozitív oktánson belül gyengén kontrollálható, ha ugyanez igaz minden $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}_1 > 0$ *szigorúan pozitív vektorra.*

Ezekre a fogalmakra röviden mint POBEK es POBGYK fogok hivatkozni, vagy ha nem akarom specifikálni hogy melyikről van szó, akkor csak POBK.

Nyilván ha a rendszer pozitív és kontrollálható (mint az előző fejezetekben), akkor ebben az új értelemben is kontrollálható. Azt várjuk azonban, hogy sok nem pozitív rendszer is kontrollálható a pozitív oktánson belül. Azonnal felmerül a kérdés, hogy a szokásos (nem pozitív) kontrollálhatóság vajon elegendő-e a POBK-hoz? Azaz, ha egy rendszer kontrollálható, akkor tudjuk-e úgy is kontrollálni, hogy közben nem hagyjuk el a pozitív oktánst. A válasz talán meglepő módon nemleges, amint a következő példa mutatja:

Példa 3.1. *Legyen* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *és* $b = [0,1]^T$, *illetve* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Ekkor az* (A, b) *által megadott lineáris ill.* (A, B) *által megadott bilineáris rendszerek kontrollálhatók, de egyik sem POBK. Ezt könnyű látni, hiszen tetszőleges* $\mathbf{x}(0) > 0$ *vektor esetén* $A\mathbf{x}(0)$ *első koordinátája negatív lesz, és ezen a kontroll-változóval nem tudunk változtatni.*

Tehát a hagyományos kontrollálhatóság *nem elégséges* feltétele a PBOK-nak (és ez nem csak 2 dimenzióban van így, hasonló példákat könnyű magasabb dimenzióban is konstruálni).

Az is világos, hogy *lineáris esetben* a hagyományos értelmű kontrollálhatóság *szükséges* feltétele a POBK-nak. Ugyanis ebben az esetben minden k-dik elérhetőségi halmaz egy affin altér, és ha ez n lépésszám után nem válik n-dimenzióssá (azaz a rendszer nem kontrollálható a hagyományos értelemben), akkor az elérhető állapotok halmaza nem adhatja ki a teljes $\mathbb{R}^n_+$-t (hiszen az n-dimenziós).

Bilineáris esetben már nem tudom belátni ezt a *szükségességét*, de lehet hogy nem nehéz (ha egyáltalán igaz...).

Megvizsgáltam a POBK-t lineáris rendszerek esetén (szerintem még ezt se vizsgálta senki az irodalomban, legalábbis semmit nem találtam).

Az első megjegyzés, hogy ha $\mathbf{x}(0) \geq 0$-ből egy $\mathbf{x}_1 \geq 0$ elérhető, akkor az $\mathbf{x}_1 + u\mathbf{b}$ egyenesnek a pozitív oktánsba eső darabja is elérhető (ez triviális). Tehát az elérhetőségi halmaz minden lépésben vagy üres (mint a fenti Példában), vagy $\mathbf{b}$-vel párhuzamos olyan egyenes szakaszok (vagy félegyenesek) uniója, amelyek végpontjai a pozitív oktáns határain vannak. A kérdés az, hogy ezek az elérhetőségi halmazok mikor telítik be az egész $\mathbb{R}^n_+$ oktánst, illetve fordítva, hogy mikor lehet üres egy elérhetőségi halmaz, vagy lehet-e nem üres és invariáns. Ezeket nem triviális megnézni.

Ismét a két-dimenziós esetet tudom karakterizálni:

Tétel 3.2. *Tekintsük az* $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + u(k)\mathbf{b}$ *lineáris rendszert.*

(i) Tegyük fel, hogy $\mathbf{b}$*-nek egyik koordinátája pozitív, másik negatív, azaz pl.* $\mathbf{b} = [m, p]^T$, $m < 0$, $p > 0$. *Ekkor a rendszer nem lehet POBEK. Továbbá a rendszer pontosan akkor POBGYK ha*

a; az $R_A = A\mathbb{R}^2_+$ *nyílt szektor csak az origóban találkozik a* $\mathbf{b}$*-iranyú egyenessel (tehát a* $\mathbf{b}$ *iranyú egyenes a szektoron kívül halad), és*

b; $[\mathbf{b}, A\mathbf{b}]$ *rangja 2, és*

c; az $\mathbf{s}_1 := [-m, 0]$ *és* $\mathbf{s}_2 := [0, p]$ *pontokat összekötő (*$\mathbf{b}$ *irányú) egyenes és az* $A\mathbf{s}_1$ *és* $A\mathbf{s}_2$ *pontokat összekötő egyenes az* R_A *szektoron belül metszik egymást.*

(ii) Tegyük fel, hogy $\mathbf{b}$ *szigorúan pozitív (vagy, ami ezzel ekvivalens, szigorúan negatív). Ekkor a POBEK és POBGYK ekvivalensek, és pontosan akkor teljesülnek ha*

a; $[\mathbf{b}, A\mathbf{b}]$ *rangja 2, és*

b; $\mathbf{z}$*-vel jelölve azt a pozitív koordinátatengelyt (azaz* $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ *vagy* $\mathbf{z} = \mathbf{y}$*), ami a* $\mathbf{b}$ *irányú egyenes által meghatározott nyílt félsíkok közül ugyanarra esik, mint* $A\mathbf{b}$*, az teljesül, hogy* $A\mathbf{z}$ *a másik nyílt félsíkra esik.*

(iii) Tegyük fel, hogy $\mathbf{b}$*-ben van 0 koordináta; feltehető (esetleges változó permutálás után), hogy* $\mathbf{b} = [0, 1]^T$*. Ekkor a POBK-hoz szükséges, hogy* $a_{11} \geq 0$ *és* $a_{12} > 0$*. Ha* $a_{11} > 0$*, akkor a rendszer nem lehet POBEK, és pontosan akkor POBGYK ha* $a_{11} < 1$*. Ha* $a_{11} = 0$*, akkor a rendszer POBEK.*

Bizonyítás. Csak vázlatot adok.

Az (i) pont: legyen $\mathbf{b} = [m, p]^T$ ahol $m < 0$, $p > 0$. A rendszer nyilván nem lehet POBEK, mert az $\mathbf{x}(0) = 0$-ból indulva nem tudunk nemnegatív állapotba lépni.

Ha az R_A szektor tartalmazza $\mathbf{b}$-t vagy $-\mathbf{b}$-t, akkor van olyan $\mathbf{x}(0) > 0$ állapot, amit $\mathbf{b}$ irányú vektorba visz, és ekkor a kontrollal is csak $\mathbf{x}(1) = c\mathbf{b}$ állapotba tudjuk juttatni a rendszert, ami csak akkor nemnegatív, ha $c = 0$, és így a rendszer nem POBGYK. Nyilván az is szükseges, hogy $[\mathbf{b}, A\mathbf{b}]^T$ rangja 2 legyen, a hagyományos kontrollálhatóság szükségessége miatt.

Tegyük tehát fel, hogy az R_A szektoron kívül fut a $\mathbf{b}$ irányú egyenes, és a rang-feltétel is teljesül. Ekkor könnyű követni az elérhetőségi halmazokat (mindig egy $\mathbf{b}$-vel párhuzamos alapú trapéz lesz az $\mathbb{R}^2_+$-on belül) és nem nehéz belátni, hogy ezek pontosan akkor telítik be az egész pozitív síknegyedet, ha a Tétel c; feltétele teljesül.

A (ii) pont: a rang-feltétel megint nyilván szükséges. Ha b; feltétel nem teljesül, akkor az $S_{\mathbf{b},\mathbf{z}}$ szektor rendszer-invariáns. Ha pedig mindkét feltétel teljesül, akkor könnyű belátni, hogy bármilyen $\mathbf{x}(0)$ $\geq$-ből indulva a harmadik elérhetőségi halmaz már a teljes pozitív negyed.

A (iii) pont: nyilván szükséges, hogy $a_{11}, a_{12} \geq 0$ különben az első koordináta negatívvá válhat, és azon a kontrollal nem tudunk segíteni; a rang-feltétel miatt az is szükséges, hogy a_{12} szigorúan pozitív. Ha $a_{11} > 0$, akkor az első koordináta nem válhat nullává, így a rendszer nem lehet POBEK. Ha $a_{11} \geq 1$, akkor az $[1, 0]^T + \mathbb{R}^2_+$ eltolt negyed invariáns lesz. Különben könnyű látni, hogy az elérhetőségi halmazok mindig $[x_k, 0]^T + \mathbb{R}^2_+$ alakúak, ahol x_k tart nullához, így a rendszer POBGYK.

Ha pedig $a_{11} = 0$, akkor könnyű látni, hogy tetszőleges $\mathbf{x}(0) \geq 0$ esetén a második elérhetőségi halmaz már a teljes zárt pozitív síknegyed. □

Itt is felsorolunk néhány nyitott problémát:

4. Probléma. Karakterizáljuk a lineáris esetben a POBK-t magasabb dimenziókban, vagy legalábbis adjunk nem-triviális elégséges ill. szükséges feltételeket.

5. Probléma. Karakterizáljuk a POBK-t 2-dimenziós bilineáris rendszerekre.

6. Probléma. Karakterizáljuk a POBK-t a bilineáris esetben magasabb dimenzióban, vagy legalábbis adjunk nem-triviális elégséges ill. szükséges feltételeket (esetleg növelve a kontroll változók számát $m > 1$-re).

References

[1] A. Bacciotti, On the positive orthant controllability of two-dimensional bilinear systems, *Sys. Control Lett.*, 3: 53-55, 1983.

[2] A. Berman, M. Newmann, R.Y. Stern, *Nonnegative Matrices in Dynamic Systems* (Wiley, New York, 1989).

[3] W. M. Boothby, Some comments on positive orthant controllability of bilinear systems, *SIAM J. Control Optim.*, 20: 634-644, 1982.

[4] L. Caccetta, V. Rumchev, "A survey of reachability and controllability for positive linear systems," *Annals of Operations Research*, vol. 98, pp 101-122, 2000.

[5] P.G. Coxson, H. Shapiro, Positive input reachability and controllability of positive systems, *Linear Algebra and its Applications* 94 (1987) 35-53.

[6] L. Farina, S. Rinaldi, *Positive linear systems: Theory and applications.* New York: Wiley, 2000.

[7] Sachkov, Y. L. Controllability of bilinear systems with a scalar control in the positive orthant, (in Russian) *Mat. Zametki* 58 (1995), no. 3, 419-424; translation in *Math. Notes* 58 (1995), no. 3-4, 966-969 (1996).

[8] Y. L. Sachkov, On positive orthant controllability of bilinear systems in small codimensions, *SIAM J. Control Opt.*, 35: 29-35, 1997.

[9] T. J. Tarn, D.L. Elliott, T. Goka, Controllability of discrete bilinear systems with bounded control, *IEEE Trans. Aut. Control*, 18: 298-301, (1973).

[10] M.E. Valcher, Controllability and reachability criteria for discrete-time positive systems, *International Journal of Control* 65(3) (1996) 511-536.