



DIPLOMAMUNKA

Ljapunov-függvényen alapuló szabályozótervezési módszerek nemlineáris rendszerekre

Írta:

Bokányi Ágnes

Témavezető:

Prof. Hangos Katalin

tudományos tanácsadó

MTA SzTAKI

Folyamatirányítási Kutatócsoport

Tanszéki konzulens:

Prof. Petz Dénes

tanszékvezető egyetemi tanár

BME Természettudományi Kar

Analízis Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. Problémafelvetés	3
1.2. Irodalmi áttekintés	4
1.3. A dolgozat szerkezete és jelölései	5
1.3.1. A dolgozatban használt jelölések	6
2. Elméleti alapok és felhasznált eszközök	8
2.1. Konvex halmazok és metszeteik	8
2.2. Stabilizáló szabályozók	9
2.2.1. Lineáris rendszerek	9
2.2.2. Szabályozótervezési módszerek	10
2.3. A Ljapunov-függvény tétel	13
2.3.1. A Ljapunov-függvény tétel lineáris rendszerekre	14
2.4. Hibrid rendszerek	16
2.4.1. Szakaszonként affin lineáris (PWA) rendszerek	17
2.5. Lineáris paraméter változós (LPV) rendszerek	18
2.6. A felhasznált matematikai eszközök	20
2.6.1. Linearizálás	20
2.6.2. Lineáris mátrixegyenlőtlenségek (LMI)	22
2.7. A felhasznált számítástechnikai eszközök	25
2.7.1. A MATLAB LMI Toolbox	25
2.7.2. Konvex tartományok ábrázolása MATHEMATICA program segítségével	26
3. Kontrol Ljapunov-függvényen alapuló szabályozótervezés	27
3.1. Lineáris rendszer szabályozása visszacsatolással adott kontrol Ljapunov-függvénnyel	27
3.2. Nemlineáris rendszerek szabályozása	31
3.2.1. Közös kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozás PWA hibrid rendszerekre	31
3.2.2. További nemlineáris rendszerek szabályozása	37

4. Esettanulmány	38
4.1. A fizikai rendszer leírása	38
4.2. Linearizálás	39
4.3. A visszacsatolás nélküli hibrid rendszer stabilitása	39
4.4. Kontrol Ljapunov-függvényen alapuló szabályozó tervezése	40
4.4.1. Szabályozó tervezése MATHEMATICA programmal	40
4.4.2. Szabályozás MATLAB LMI Toolbox segítségével	46
4.4.3. Szabályozás LPV módon	47
5. Összefoglalás	49
Hivatkozások	50

1. Bevezetés

1.1. Problémafelvetés

A nemlineáris koncentrált paraméterű rendszerek stabilizáló szabályozóinak tervezése általános esetben nemlineáris korlátos optimalizációs feladatra vezet. A tervezés csak bizonyos rendszerosztályokon (például Lotka-Volterra, vagy kvázipolinom alakú rendszermodellek) és/vagy előírt speciális úgynevezett kontrol Ljapunov-függvények esetében (például kvadratikus Ljapunov-függvény) oldható meg az irodalomból ismert módszerekkel. Ezért nagy fontossága van olyan könnyen (polinomiális időben) számolható szabályozó tervezési módszerek kidolgozásának és vizsgálatának, amelyek a gyakorlatban előforduló nemlineáris rendszerosztályokhoz használhatók.

A kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozótervezéssel például közlekedési, járműdinamikai és fizikai rendszereket tudunk stabilizálni. Napjainkban egyre nagyobb jelentőséggel bírnak ezek a stabilizáló szabályozók mind a kutatás, mind alkalmazás területén.

A diplomamunka keretében a stabilizáló szabályozók családjába tartozó kvadratikus Ljapunov-függvényen alapuló szabályozótervezési módszert alkalmazzuk lineáris, hibrid majd pedig nemlineáris rendszerosztályokra. Mindhárom rendszerosztályon saját példával demonstráljuk a módszer működését. A szabályozótervezést lineáris mátrixegyenlőtlenségek megoldására vezetjük vissza.

Kontrol Ljapunov-függvényen alapuló szabályozótervezési módszerek közül alapvetően háromfélét különböztetünk meg:

1. Adott kvadratikus kontrol Ljapunov-függvényhez keresünk stabilizáló, statikus, lineáris, teljes állapot visszacsatolást. A problémát lineáris mátrixegyenlőtlenségekkel tudjuk leírni, melyet a MATLAB LMI Toolbox és MATHEMATICA programokkal polinomiális időben megoldhatunk. A programok között csupán annyi a különbség, hogy a MATLAB LMI Toolbox segítségével egy megfelelő megoldást kapunk, míg a MATHEMATICA programmal az összes megoldást kirajzolhatjuk (kétdimenziós állapottér esetében).
2. Adott egy visszacsatolás, melyhez keresünk megfelelő kontrol Ljapunov-függvényt. Ilyen például a súrlódó rezgőrendszer parametrizált egyenletrendszerének megoldása. A MATLAB LMI Toolbox programmal egy alkalmas Ljapunov-

függvény kereshető. Tudjuk azonban, hogy egy megfelelő Ljapunov-függvény segítségével végtelen sok alkalmas Ljapunov-függvény is előállítható.

3. Ha a szabályozótervezésnél egyszerre keressük a Lajpunov-függvényt és a stabilizáló visszacsatolást, akkor a problémát bilineáris mátrixegyenlőtlenség megoldására vezethetjük vissza [1]. Ezt az NP nehéz feladatot a MATLAB BMI Toolbox segítségével lehet megoldani. Ezzel a szabályozótervezéssel a diplomamunkában nem foglalkoztunk.

1.2. Irodalmi áttekintés

A szabályozótervezés legalapvetőbb módszereit a legegyszerűbb rendszerosztályra, a folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerekre dolgozták ki. Az irodalomban ismert szabályozók közül a lineáris időinvariáns rendszerekre alkalmazható **pólusáthelyezést (pole-placement)** és a **lineáris kvadratikus szabályozó (LQR)** módszerét a 2.2. fejezetben részletesen ismertetjük. A pólusáthelyezés feladatát csakúgy, mint a kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozást lineáris, statikus, teljes állapot visszacsatolással oldják meg. A pólusáthelyezés feladatát csak egyelemű bemeneti vektort tartalmazó lineáris időinvariáns rendszerekre alkalmazhatjuk, míg az LQR szabályozó általánosabb, hiszen segítségével nemlineáris, sztochasztikus és diszkrét rendszereket is tudunk szabályozni.

A diplomamunkában részletesen nem tárgyalt **ütemezéssel visszacsatolás (gain-scheduling)** egy tipikusan mérnöki stabilizáló eljárás nemlineáris rendszerekre [2]. Az ütemezéssel visszacsatolás valójában heurisztika, először a nemlineáris rendszert egyensúlyi helyzetei körül linearizáljuk, majd az így kapott részrendszereket már lineáris szabályozók segítségével tudjuk szabályozni. A nemlineáris rendszer szabályozóját pedig a lineáris szabályozók egymáshoz illesztésével kapjuk, viszont erre az illesztésre nincs egzakt matematikai alapon kidolgozott módszer.

A kontrol Ljapunov-függvényen alapuló szabályozótervezés konzervatív módszer. Ljapunov-függvény nem minden stabilizálható rendszerhez létezik, viszont tudjuk, hogy ha létezik alkalmas Ljapunov-függvény, akkor végtelen sok megfelelő Ljapunov-függvény is előállítható. Megjegyezzük, hogy Ljapunov-függvény keresésére nincsen általános módszer. Léteznek a kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozótervezésnél általánosabb módszerek, melyekkel például **PQ-stabilitást biztosító szakaszonként**

folytonos Ljapunov-függvények, vagy paramétertől függő Ljapunov-függvények állíthatók elő [2, 3].

Az fentiekben felsorolt szabályozási technikákat folytonos rendszerekre vizsgáltuk. A diszkrét rendszereken a csúszóhorizontú modell prediktív kontrol alapú **MATLAB MPC Toolbox programcsomag** segítségével többféle szabályozást tudunk alkalmazni szakaszonként affin hibrid rendszerekre [3].

1.3. A dolgozat szerkezete és jelölései

A diplomamunka szerkezete a következő:

- Az 1.3.1. alfejezetben a legfontosabb jelölések és rövidítések olvashatók.
- Az Elméleti alapok és felhasznált eszközök című fejezetben ismertetjük a dolgozatban használt legfontosabb definíciókat, tételeket illetve a használt matematikai és számítástechnikai eszközöket.
 - Felsoroljuk a konvex halmazok és metszeteik legfontosabb tulajdonságait,
 - majd emlékeztetünk a rendszer és irányításelméleti alapfogalmakra és a szabályozótervezési módszerekre, részletesen kitérünk a pólusáthelyezés (pole placement) és a lineáris kvadratikus szabályozás (LQR) technikájára.
 - Ismertetjük a szabályozótervezési módszerünk matematikai alapját képező Ljapunov-függvény tételt, melyet részletesen vizsgálunk lineáris időinvariáns (LTI) rendszereken.
 - Speciális rendszerosztályokat vizsgálunk, először a hibrid rendszerek osztályát tekintjük, ahol részletesen ismertetjük a szakaszonként affin lineáris (PWA) rendszereket, majd pedig a lineáris paraméter változós (LPV) rendszerek osztályát. Mindkét osztályt aszimptotikus stabilitás szempontjából részletesen is vizsgáljuk, emlékeztetünk a nevezetesebb tételekre.
 - Összefoglaljuk a felhasznált matematikai eszközöket, úgymint a linearizálást és a lineáris mátrixegyenlőtlenségek (LMI-k) elméletét.
 - Ismertetjük a használt számítástechnikai programokat, melyek közül elsőként a lineáris mátrixegyenlőtlenségeket kezelő MATLAB LMI Toolbox programcsomagot, majd pedig a konvex halmazok grafikai megjelenítésére is használható MATHEMATICA programot.

- A 3. fejezetben tárgyaljuk a közös kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozó tervezését. Először a lineáris, majd hibrid rendszerek szabályozásának elvét mutatjuk be és egy-egy saját példán illusztráljuk a szabályozótervezést. Végül kitérünk a nemlineáris rendszerek osztályának szabályozására.
- Az Esettanulmány című 4. fejezetben egy erősen nemlineáris fizikai példán mutatjuk be a közös kontrol Ljapunov-függvényen alapuló szabályozótervezést. Először állapotér modellt alkotunk, melyet linearizálás után aszimptotikus stabilitás szempontjából vizsgálunk. Ezek után adott közös kontrol Ljapunov-függvényhez keresünk stabilizáló visszacsatolást MATHEMATICA illetve MATLAB programokkal, majd adott visszacsatoláshoz keresünk kontrol Ljapunov-függvényt, miközben a modellt lineáris paraméter változós (LPV) rendszerré alakítjuk.
- A diplomamunka zárásaként összefoglalás és értékelés olvasható.

1.3.1. A dolgozatban használt jelölések

$\forall x$	minden x -re vagy tetszőleges x -re
$\exists x$	létezik olyan x vagy bizonyos x -re
∞	végtelen
\mathbb{R}^n	az n -dimenziós euklideszi tér
\mathbb{R}^+	a pozitív valós számok halmaza
\mathbb{N}	a természetes számok halmaza
$x \in \mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}$	az x elem része az \mathbb{R} halmaz \mathbb{V} részhalmazának
$\text{co}(\mathbb{V})$	a \mathbb{V} halmaz konvex burka
$\ x\ $	az x vektor normája az n -dimenziós euklideszi térben
$[0, 1]$	zárt intervallum
$(0, 1)$	nyílt intervallum

$x \preceq y$	az x és y vektorokra vonatkozó elemenkénti egyenlőtlenség, azaz a „ \preceq ” reláció akkor áll fenn, ha a vektorok minden elemére fenn áll az $x_i \leq y_i$ reláció.
$f: J \rightarrow \mathbb{R}$	a J halmazt \mathbb{R} halmazba leképező függvény
$I \times \Omega$	az I és az Ω halmazok direkt szorzata
$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$	n sorból és m oszlopból álló valós A mátrix
$\det(A)$	az A mátrix determinánsa
$\text{rang}(A)$	az A mátrix rangja
$\text{diag}\{a_1, a_2, a_3\}$	diagonális mátrix, a diagonálisban a_1, a_2 és a_3 elemekkel
$\lambda_i(A)$	az A mátrix sajátértékei
A^T	az A mátrix transzponáltja
A^{-1}	az A mátrix inverze
$\Re(a)$	az a szám valós része
$A > 0, A < 0$	az A mátrix pozitív illetve negatív definit
F_{lk}	az F mátrix l -edik sorának k -edik eleme
$\dot{V}_{(n)}$	a V Ljapunov-függvény (n) egyenletbeli rendszer szerinti deriváltja
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$	az x függvény idő szerinti deriváltja
$\frac{\partial F}{\partial x}$	az f függvény Jacobi-mátrixa
$B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ x\ < \delta\}$	az origó körüli δ sugarú nyílt gömb
LTI	Lineáris időinvariáns rendszer
LQR	Lineáris kvadratikus szabályzó
LMI	Lineáris mátrixegyenlőtlenség
LPV	Lineáris paraméter változós rendszer
PWA	Szakaszonként affin lineáris rendszer

2. Elméleti alapok és felhasznált eszközök

Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk a diplomamunkában előforduló legfontosabb fogalmakat és tételeket, valamint ismertetjük a vizsgálatokhoz felhasznált matematikai és számítástechnikai eszközöket.

2.1. Konvex halmazok és metszeteik

A Weierstrass tétel kimondja, hogy kompakt halmazon értelmezett folytonos függvények felveszik szuprémumukat illetve infimumukat. Ez a tétel biztosítja, hogy az optimalizációs problémák célfüggvényének (megadott feltételek mellett) létezik minimális vagy maximális értéke. A diplomamunkában tárgyalt problémáknál azonban a folytonosság és a kompaktság túlságosan korlátozóvá válhat, ezért ezen esetekben a konvexitási feltételeket használjuk.

2.1.1. Definíció. [4] Egy $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ nem üres halmazt **konvex halmaznak** nevezünk, ha bármely két $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$ vektor esetén az x_1, x_2 vektorokat összekötő szakasz minden pontja is eleme a \mathbb{V} halmaznak, azaz

$$x := \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \mathbb{V}, \quad \lambda \in [0, 1] . \quad (1)$$

Megfigyelhetjük, hogy a konvex halmaz tartalmazza tetszőleges két elemének konvex kombinációját. Emlékeztetünk rá, hogy az általános esetben a konvex kombináció definíciója a következő:

2.1.2. Definíció. [4] Az $x_1, x_2, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ vektorok **konvex lineáris kombinációin** olyan

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r \quad (2)$$

lineáris kombinációkat értünk, melyeknél $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$.

Könnyen beláthatjuk, hogy r elem konvex lineáris kombinációból álló halmaz is konvex. A konvex halmazokon végzett műveletek sok esetben megtartják a konvexitást, erről szól a következő tétel.

2.1.1. Tétel. [2] Legyenek $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex részhalmazok, ekkor a következő halmazok konvex halmazok:

1. $\lambda \mathbb{V}_1 := \{x \mid x = \lambda s, s \in \mathbb{V}_1\}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén ;

2. az összeghalmaz $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 := \{x \mid x = s + t, s \in \mathbb{V}_1, t \in \mathbb{V}_2\}$;

3. a metszethalmaz $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 := \{x \mid x \in \mathbb{V}_1 \text{ és } x \in \mathbb{V}_2\}$.

A következő fejezetben szükségünk lesz a konvex burok, a csúcspont és a konvex poliéder kifejezésekre, melyek definíciója a következő.

2.1.3. Definíció. [4] Az \mathbb{R}^n egy tetszőleges \mathbb{V} részhalmazának **konvex burka** mindazon vektorok összessége, melyek véges sok \mathbb{V} halmazbeli vektorok konvex lineáris kombinációi, azaz \mathbb{V} konvex burka $co(\mathbb{V})$ a következő halmaz:

$$co(\mathbb{V}) = \left\{ x \mid \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i, x_i \in \mathbb{V}, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, r \right\} . \quad (3)$$

2.1.4. Definíció. [4] Legyen \mathbb{V} az \mathbb{R}^n egy tetszőleges részhalmaza. Az y **csúcspontja**, vagy **extremális pontja** a \mathbb{V} halmaznak, ha nem léteznek olyan $x_1, x_2 \in \mathbb{V}$ vektorok, melyekre igaz, hogy

$$y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in (0, 1) . \quad (4)$$

2.1.5. Definíció. [4] Az \mathbb{R}^n egy nem üres \mathbb{X} részhalmaza **konvex poliéder**, ha előáll véges sok zárt féltér közös metszeteként, tehát felírható az

$$\mathbb{X} = \{x \mid Ax \preceq b\} \quad (5)$$

alakban, ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

2.2. Stabilizáló szabályozók

A stabilizáló szabályozók részletes tárgyalása előtt ismertetjük a rendszer és irányításmélet alapfogalmait és összefüggéseit.

2.2.1. Lineáris rendszerek

Egy folytonos idejű rendszer dinamikáját egy

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (6)$$

nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer adja meg, ahol $x(t) \in \mathbb{R}^n$ az **állapot**, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a **bemenet**, más néven **irányítási** vagy **vezérlési vektor**. Jelölje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ az **állapotteret** (azaz a lehetséges állapotok halmazát), $U \subseteq \mathbb{R}^m$ a lehetséges bemenetek halmazát és $J \subseteq \mathbb{R}$

a dinamika időintervallumát. Ekkor a dinamikát leíró függvény $f : J \times \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$. A kimenet az

$$y(t) = h(t, x(t), u(t)) \quad (7)$$

függvénnyel írható le, ahol $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a **kimenet vektora** és $h : J \times \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Jelölje $\xi(t) = \xi(t; t_0, x_0, u)$ a (6) rendszer $u(\cdot)$ irányítás melletti $\xi(t_0) = \xi(t_0; t_0, x_0, u) = x_0$ kezdeti értéket felvevő megoldását. A (6) rendszer egy adott $u(\cdot) = u^0$ irányításhoz tartozó egyensúlyi helyzete legyen x^0 .

A továbbiakban foglalkozunk az úgynevezett **időinvariáns lineáris (LTI) rendszerekkel**, melyek állapotter-modellje az

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8)$$

állapotegyenletből és az

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (9)$$

kimeneti egyenletből áll, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ valós mátrixok.

2.2.2. Szabályozótervezési módszerek

Amint azt az előző alfejezetben is láttuk, az $u(t)$ vezérlési vektorok lehetséges értékeinek halmaza $U \subseteq \mathbb{R}^m$, ami az irányításelemben gyakran kompakt. A vezérlés megadásakor gyakran az $u(\cdot)$ vezérlési függvénynek bizonyos feltételeknek kell eleget tennie, pl. előre megadott függvényosztályba kell tartoznia (szakaszonként konstans, szakaszonként folytonos, stb.).

Alapvetően két típusa létezik a vezérlés megadásának [5]:

- Az első típusba sorolhatjuk a **program szerinti vezérlést**, melynek az irányításelemben használatos elnevezése még a vezérlés nyílt hurokkal, illetve open-loop control. A nyílt hurokkal történő vezérlés során az irányítást program vagy előzetes számítások alapján adjuk meg minden egyes t időpillanatban egy $u : t \rightarrow u(t)$ időfüggvényként.
- A vezérlés másik módja a **visszacsatolással megadott vezérlés** (vezérlés zárt hurokkal, closed-loop vagy feedback control).

- A zárt hurok esetében az időnek, a rendszer állapotának és/vagy a kimenetnek függvényeként adunk meg egy ϕ függvényt. Például, ha az időnek és a rendszer állapotának függvényeként adjuk meg a $\phi : (t, x) \rightarrow \phi(t, x)$ függvényt, akkor vezérlésként a t időpillanatban az $u(t) = \phi(t, x(t))$ vektort alkalmazzuk.
- A visszacsatolás lehet statikus vagy dinamikus aszerint, hogy az állapottól és/vagy a kimenettől illetve azok deriváltjától függ-e a ϕ visszacsatolási függvény.
- Lineáris, teljes állapot visszacsatolásnak azt az $u = F(x)$ visszacsatolt vezérlést nevezzük, ahol az F függvény lineáris és függ az állapotvektor minden komponensétől.

A visszacsatolással megadott vezérlésnek az a nagy előnye, hogy ha a rendszer trajektóriája külső hatásra eltér a tervezettől, akkor ez a visszacsatolt függvény ehhez az új állapothoz határozza meg a megfelelő vezérlési vektort. A diplomamunkában állapottól függő visszacsatolásokkal foglalkozunk.

Szabályozótervezési módszerek közül elsőként a **pólusáthelyezés (pole-placement)** módszerét ismertetjük [5–7], melyet csak egyelemű bemeneti vektort ($u(t) \in \mathbb{R}$) tartalmazó lineáris időinvariáns rendszerekre alkalmazhatunk. A pólusáthelyezés feladatát olyan lineáris, statikus, teljes állapot visszacsatolás oldja meg, mely függ a rendszer mátrixoktól. Először ismertetjük a pólus definícióját:

2.2.1. Definíció. Egy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (10)$$

lineáris időinvariáns rendszer **pólusai** az A mátrix sajátértékei (az $a(s) = \det(sI - A)$ karakterisztikus polinom gyökei).

A pólusáthelyezés feladata a következő: adott egy lineáris időinvariáns rendszer ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$), és tetszőlegesen adott $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ n -edfokú valós együtthatós polinomhoz keresendő olyan $D \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ mátrix, hogy $\det(\lambda I - (A + BD)) = p(\lambda)$ teljesül. Ha a pólusáthelyezés megoldható, akkor az $u(t) = Dx(t)$ visszacsatolt vezérléssel az

$$\dot{x}(t) = (A + BD)x(t) \quad (11)$$

rendszer rendszermatrixának sajátértékeit tetszőleges módon előírhatjuk.

A **lineáris kvadratikus szabályozó (LQR)** [6, 7] az előző módszernél általánosabb, hiszen segítségével nemlineáris, sztochasztikus és diszkrét rendszereket is tudunk szabályozni. Ebben az esetben olyan visszacsatolást keresünk az

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (12)$$

rendszerhez, mely minimalizál egy előre megadott

$$J(x, u) = \int_0^T F(x, u, t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (13)$$

költségfüggvényt, ahol $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pedig pozitív definit szimmetrikus mátrix. Bevezetve a

$$H(x, u, t) = F(x, u, t) + \lambda f(x, u, t) \quad (14)$$

Hamilton- függvényt az optimális irányítást megkapjuk a variációs számítás eszközeivel a

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (15)$$

Euler-Lagrange egyenletekből. Irányítható, lineáris, időinvariáns esetben az optimális visszacsatolást a

$$\dot{K}(t) + K(t)A + A^T K(t) - K(t)BR^{-1}B^T K(t) + Q = 0 \quad (16)$$

mátrix Riccati differenciálegyenlet-rendszerből kellene kiszámolni, ami az általános esetben nehéz. Viszont, ha a J költségfüggvényt $T \rightarrow \infty$ esetben szeretnénk minimalizálni, visszacsatolásként

$$u(t) = -R^{-1}B^T Kx(t) \quad (17)$$

alakban teljes állapot visszacsatolást kapunk egy konstans K mátrix-szal, ami bizonyos feltételek mellett a

$$KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q = 0 \quad (18)$$

kontrol algebrai Riccati egyenlet egyetlen megoldása. Az eredményül kapott

$$\dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T K)x(t) \quad (19)$$

visszacsatolt rendszer aszimptotikusan stabil lesz.

Megjegyezzük, hogy az LQR szabályozótervezés, ugyanúgy mint a pólusát helyezés feladata könnyen számolható MATLAB [8] segítségével.

A pólusáthelyezés és az LQR eset összehasonlításához fontos tudni, hogy irányítható, lineáris, időinvariáns rendszert lineáris kvadratikus szabályozóval $T \rightarrow \infty$ esetben stabilizálhatunk. Ekkor a zárt rendszer pólusai a Q és az R mátrixoktól függenek. A stabilizálhatóság definíciója a következő:

2.2.2. Definíció. [5] A (8) kimenet nélküli időinvariáns lineáris rendszert **stabilizálhatónak** nevezzük, ha létezik egy olyan, az állapottól lineárisan függő

$$u(\cdot) = Kx(\cdot) \quad (20)$$

vezérlés, hogy az

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (21)$$

visszacsatolt rendszer aszimptotikusan stabil.

2.3. A Ljapunov-függvény tétel

Adott egy folytonos idejű, autonóm, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer a következő alakban [9, 10]:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad , \quad (22)$$

ahol $x(t) \in \mathbb{R}^n$ az állapot. Jelölje $J \subseteq \mathbb{R}^+$ a dinamikát leíró időintervallumot, Ω az \mathbb{R}^n - nek egy a kezdeti állapotot (x_0) tartalmazó tartományát (összefüggő nyílt halmazát), ekkor $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. Legyen továbbá F elegendően sima, hogy a (22) rendszerre teljesüljön az egzisztencia és unicitás tétele. Jelölje $\xi(t) = \xi(t; t_0, x_0)$ a (22) rendszer $\xi(t_0) = \xi(t_0; t_0, x_0) = x_0$ kezdeti értéket felvevő megoldását, utalva a kezdeti értéktől való folytonos függésre. Tegyük fel, hogy $F(0) = 0$, így a (22) rendszernek az origó egyensúlyi helyzete.

2.3.1. Definíció. [10] A $\xi = 0$ megoldást **stabilnak** nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $t_0 \in J$ esetén létezik egy $\delta > 0$ úgy, hogy minden $x_0 \in B_\delta$ és $t \in J$ esetén $\|\xi(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ teljesül.

2.3.2. Definíció. [10] A $\xi = 0$ megoldást **vonzónak** mondjuk, ha minden $t_0 \in J$ esetén létezik egy $\eta = \eta(t_0)$, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén és minden $\|x_0\| < \eta$ -hoz létezik egy $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon, x_0) > 0$ úgy, hogy minden $t \geq t_0 + \sigma$ és $t \in J$ esetén $\|\xi(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ teljesül.

2.3.3. Definíció. [10] A $\xi = 0$ megoldást **aszimptotikusan stabilnak** mondjuk, ha stabil és vonzó.

Megjegyezzük, hogy az aszimptotikus stabilitás lineáris rendszereken globális tulajdonság, míg nemlineáris rendszereken lehet lokális illetve globális tulajdonság is.

2.3.4. Definíció. [9, 10] Azt mondjuk, hogy a V függvény **Ljapunov-függvény** a (22) rendszerhez, ha a következőket teljesíti:

- (1) skalár függvény: $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$;
- (2) folytonosan differenciálható az Ω tartományon;
- (3) $V(0) = 0$, és pozitív definit az Ω tartományon: $V(x(t)) > 0$, ha $x(t) \in \Omega \setminus \{0\}$;
- (4) a V függvénynek a (22) rendszer szerinti deriváltja negatív definit:

$$\dot{V}_{(22)}(x) := \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_x F(x) < 0 \quad x \in \Omega \setminus \{0\} . \quad (23)$$

Megjegyezzük, hogy, ha egy rendszerhez létezik egy Ljapunov-függvény, akkor ehhez a rendszerhez végtelen sok Ljapunov-függvény létezik, hiszen megfelelő konstanssal beszorozva újabb alkalmas Ljapunov-függvényt kaphatunk. Ezen kívül két alkalmas Ljapunov-függvény konvex lineáris kombinációja is megfelelő Ljapunov-függvény.

2.3.1. Tétel. [9, 10] Ha a (22) rendszerhez létezik Ljapunov-függvény, akkor a rendszer aszimptotikusan stabil az $x^0 = 0$ egyensúlyi pontban.

2.3.1. A Ljapunov-függvény tétel lineáris rendszerekre

Egy fizikai rendszer modellezése többféle lehet, a különböző input-output ekivalens rendszermodellek között a következő definíció teremt kapcsolatot:

2.3.5. Definíció. [5] Az

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) \quad (24)$$

és

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (25)$$

időinvariáns rendszereket **lineárisan ekvivalensnek** nevezünk, ha létezik olyan invertálható T mátrix, hogy

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB . \quad (26)$$

A lineárisan ekvivalens rendszerek ugyanazt a fizikai rendszert írják le az n -dimenziós tér különböző koordinátarendszereiben. A lineáris időinvariáns (LTI) rendszereken az aszimptotikus stabilitás tulajdonsága invariáns a koordináta-transzformációra vonatkozóan, azaz a fizikai rendszer tulajdonsága.

Egy folytonos idejű, autonóm, lineáris, időinvariáns, állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszert a következő egyenlet ír le:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad , \quad (27)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ valós mátrix, $x \in \mathbb{R}^n$ az állapotvektor. A (27) rendszer egyensúlyi pontja az $x^0 = 0$ pont. A későbbiekben szükségünk lesz a stabil mátrix fogalmára, mely a következő:

2.3.6. Definíció. Az A mátrix *stabil* vagy **Hurwitz-mátrix**, ha sajátértékeinek valós része negatív.

A következő négy tétel a (27) rendszer aszimptotikus stabilitására szükséges és egyben elégséges feltételt ad [5–7].

2.3.2. Tétel. A (27) rendszer az $x^0 = 0$ egyensúlyi pontban aszimptotikusan stabil akkor és csak akkor, ha $\Re(\lambda_i(A)) < 0$, $i = 1, \dots, n$, ahol $\lambda_i(A)$ az A mátrix sajátértékei (azaz A stabil mátrix vagy másnéven Hurwitz-mátrix).

2.3.3. Tétel. A (27) rendszer az $x^0 = 0$ egyensúlyi pontban aszimptotikusan stabil akkor és csak akkor, ha $\forall Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, negatív definit ($Q < 0$) mátrixhoz létezik $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus, pozitív definit mátrix úgy, hogy teljesüljön az **algebrai Ljapunov-egyenlet**:

$$A^T P + PA = Q \quad . \quad (28)$$

2.3.4. Tétel. A (27) rendszer az $x^0 = 0$ egyensúlyi pontban aszimptotikusan stabil akkor és csak akkor, ha létezik $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus pozitív definit mátrix úgy, hogy teljesüljön az **algebrai Ljapunov-egyenlőtlenség**:

$$A^T P + PA < 0 \quad . \quad (29)$$

2.3.1. Következmény. A 2.3.4. tétel értelmében a (8) rendszer stabilizálható, ha létezik $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus pozitív definit mátrix úgy, hogy teljesüljön az algebrai Ljapunov-egyenlőtlenség:

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0 \quad . \quad (30)$$

2.3.5. Tétel. A (27) rendszer az $x^0 = 0$ egyensúlyi pontban aszimptotikusan stabil akkor és csak akkor, ha létezik $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus pozitív definit mátrix úgy, hogy a

$$V(x) := x^T P x \quad (31)$$

függvény a (27) rendszer **Ljapunov-függvénye**.

Megjegyezzük, hogy

$$\dot{V}_{(27)} = x^T (A^T P + P A) x . \quad (32)$$

2.4. Hibrid rendszerek

A hibrid rendszerek egyre nagyobb jelentőséggel bírnak mind a kutatás, mind az alkalmazások területén [11–13]. Számos példát hozhatunk fel például a közlekedési és a járműdinamikai rendszerek területén. Hibrid rendszerek segítségével modellezhetünk és irányíthatunk járművek dinamikáját figyelembe vevő forgalmat, illetve olyan diszkrét forgalmat, melynél a folytonos zavarásokat is figyelembe vesszük. Ezen túlmenően leírhatjuk a folytonos rendszereket indítási, leállítási és üzemállapot váltási működésük közben, valamint kétállapotú beavatkozásszerverekkel ellátott, vagy többfokozatú berendezések működését is modellezhetjük.

A hibrid rendszerek erősen nemlineáris rendszerek. Ezen rendszerek a folytonos és diszkrét rendszerektől annyiban térnek el, hogy ezen rendszerek egyszerre tartalmaznak folytonos és diszkrét elemeket. Tehát a hibrid rendszerekben folytonos és diszkrét állapotok, folytonos és diszkrét idő vagy idő- és eseményvezérlés kombinációja fordulhat elő. Az ilyen típusú rendszerekre 1966-ban Witsenhausen használta először a hibrid rendszerek elnevezést [3]. A rendszerek hibrid viselkedését technológiai vagy működési okok váltják ki.

A rendszer természetéből fakadó technológiai okok például:

- fix térfogatú tárolók, fix lökethossz;
- rendszer állapotától függő áramlási irányok (pl. túlfolyás);
- biztonsági rendszerek működése;
- fázisállapot-változások.

Működési okok pedig a következők:

- szakaszos működés (vezérlés előre megadott program alapján);
- diszkrét jellegű külső zavarások (pl. másik tárolóra történő váltás);
- diszkrét beavatkozószerverek.

A hibrid rendszerek leírási módja alapvetően kétféle lehet: automata illetve differenciálalgebrai-egyenlet típusú, attól függően, hogy a diszkrét vagy a folytonos komponens-e a meghatározó. Például a hibrid automaták és a hibrid Petri-hálók modellezése automata típusú, míg a kapcsolt lineáris rendszerek illetve a szakaszonként affin lineáris (PWA) rendszerek modellezése differenciálalgebrai-egyenlet típusú.

Tekintsük először a **kapcsolt lineáris rendszerek** osztályát, mely a legkönnyebben kezelhető hibrid osztály [13]. Ezen rendszerek r szakaszonként konstans kapcsolófüggvénye az idő függvénye: $r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N}$. Az állapotter-modellt a következő két egyenlet írja le:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(r(t))x(t) + B(r(t))u(t) \\ y(t) &= C(r(t))x(t) \end{aligned} \quad (33)$$

ahol $(r(t), x(t)) \in \mathbb{N} \times \Omega$ a hibrid állapot, Ω az állapotter, $A(r(\cdot)), B(r(\cdot)), C(r(\cdot))$ szakaszonként konstans mátrixok.

2.4.1. Szakaszonként affin lineáris (PWA) rendszerek

A dolgozatban részletesen a **szakaszonként affin lineáris (PWA) rendszerekkel** foglalkozunk. Ez a rendszerosztály a kapcsolt lineáris rendszerekhez hasonlóan lineáris részrendszerekből áll, azzal a különbséggel, hogy ezen rendszerosztályon a „kapcsolás” az állapotoktól és nem pedig az időtől függ [3, 13, 14]. Az állapotteret belsejükben diszjunkt partíciókra osztjuk. Ezen partíciókat a

$$\Omega_i = \{x \mid G_i x + g_i \succeq 0\}, \quad i = 1, \dots, k \quad (34)$$

konvex poliéderekkel írjuk le, ahol $x \in \mathbb{R}^n$, $g_i \in \mathbb{R}^m$, $G_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i = 1, \dots, k$ esetén. Ekkor a szakaszonként affin lineáris (PWA) rendszerek állapotter-modellje a következő:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + a_i + B_i u(t) \quad , \quad x_i \in \Omega_i \\ y(t) &= C_i x(t) + c_i + D_i u(t) \quad , \end{aligned} \quad (35)$$

ahol az A_i, B_i, C_i, D_i mátrixok, és az a_i, c_i vektorok konstansok az Ω_i konvex poliédereken. Tegyük fel, hogy az $x = 0$ egyensúlyi helyzete a (35) rendszernek. Ekkor jelöljük I_0 -val az $x = 0$ állapotot magában foglaló Ω_i konvex poliéderek indexeinek halmazát, továbbá tegyük fel, hogy $a_i = c_i = 0$ minden $i \in I_0$ esetén.

A partíciók határán a dinamikának folytonosnak kell maradnia, ennek garantálásához definiálni kell a megoldásgörbét (trajektóriát):

2.4.1. Definíció. [14] Egy $x(t)$ abszolút folytonos függvény a $[t_0, t_f]$ intervallumon megoldása a (35) rendszernek, ha minden $t \in [t_0, t_f]$ időpillanatban teljesül az $\dot{x}(t) = A_i x(t) + a_i + B_i u(t)$ egyenlet minden i esetén, ahol $x(t) \in \Omega_i$.

A megoldás minden időpillanatban az egyes szakaszokon kielégíti az egyenleteket.

Szakaszonként affin lineáris rendszerek aszimptotikus stabilitásához nem elég, ha a részrendszerek külön aszimptotikusan stabilak [3]. Stabilitás ellenőrzését itt is - az egyéb nemlineáris esetekhez hasonlóan - Ljapunov-függvény segítségével tehetjük meg.

2.4.1. Tétel. [3] Egy szakaszonként affin lineáris autonóm

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \quad i = 1, \dots, k \quad (36)$$

hibrid rendszer aszimptotikusan stabil, ha létezik, olyan kvadratikus $V(x) = x^T P x$ pozitív definit Ljapunov-függvény, amelyre igaz az $A_i^T P + P A_i < 0$ Ljapunov-egyenlőtlenség $i = 1, \dots, k$ esetén.

2.5. Lineáris paraméter változós (LPV) rendszerek

Fizikai rendszereket általában olyan modellekkel írunk le, melyek állapotváltozóinak komponensei fizikai mennyiségeket jelölnek. Ezen modellek állapotter reprezentációiban a rendszermátrixok gyakran bizonytalanságot tartalmaznak, amelyek egy paraméter függvényeként fejezhetők ki. Ezeket a rendszereket nevezük **lineáris paraméter változós (LPV) rendszereknek**, melyek állapotter-modellje az

$$\dot{x}(t) = A(\delta(t))x(t) + B(\delta(t))u(t) \quad (37)$$

állapotegyenletből és az

$$y(t) = C(\delta(t))x(t) + D(\delta(t))u(t) \quad (38)$$

kimeneti egyenletből áll [2, 6], ahol $\delta(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_l(t)) \in \mathbb{R}^l$ az időtől függő paraméter. Jelölje Δ a $\delta(t)$ paraméter lehetséges értékeinek halmazát. Tekintheszük ezen LPV rendszereket úgy, mint $\delta(t)$ paraméterrel leírt lineáris időinvariáns (LTI) rendszerek egy halmazát.

Könnyen beláthatjuk, hogy a lineáris paraméteres rendszerek speciális esetei a **lineáris időváltozós (LTV)** rendszerek. A $\delta(t) = t$, $l = 1$ paraméterfüggvény választása esetén a (37) és a (38) egyenletekből az alábbi LTV állapotter-modellt kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) , \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) . \end{aligned} \quad (39)$$

A továbbiakban vizsgáljuk azon lineáris parametrikus (LPV) rendszereket, melyek rendszer mátrixai a δ paramétertől affín módon függnek, azaz

$$\begin{aligned} A(\delta) &= A_0 + \delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \dots + \delta_l A_l , \\ B(\delta) &= B_0 + \delta_1 B_1 + \delta_2 B_2 + \dots + \delta_l B_l , \\ C(\delta) &= C_0 + \delta_1 C_1 + \delta_2 C_2 + \dots + \delta_l C_l , \\ D(\delta) &= D_0 + \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_l D_l . \end{aligned} \quad (40)$$

Tegyük fel, hogy a $\delta_j(t)$, $j = 1, \dots, l$; $t \in \mathbb{R}$ paraméterkomponensek értékeit egy zárt intervallumon veszik fel: $\delta_j^{\min} < \delta_j(t) < \delta_j^{\max}$. Ekkor definiálható a paraméterértékek Δ_0 csúcshalmaza a következőképpen:

$$\Delta_0 := \{ \delta = (\delta_1, \dots, \delta_l) \mid \delta_j \in \{ \delta_j^{\min}, \delta_j^{\max} \} \quad j = 1, \dots, l \} . \quad (41)$$

Ebben a speciális esetben a Δ paraméterhalmaz megegyezik a Δ_0 csúcshalmaz konvex burkával, tehát $\Delta = \text{co}(\Delta_0)$.

2.5.1. Definíció. [2] Egy lineáris paraméteres

$$\dot{x}(t) = A(\delta(t))x(t) \quad (42)$$

autonóm rendszert **kvadratikusan stabilnak** nevezünk az $x^0 = 0$ egyensúlyi helyzetében a Δ paraméterhalmazon, ha létezik egy pozitív definit, szimmetrikus P mátrix, hogy az

$$A(\delta(t))^T P + P A(\delta(t)) < 0 \quad (43)$$

Ljapunov-egyenlőtlenség teljesül minden $\delta(t) \in \Delta$ paraméterértékre.

A kvadratikus Ljapunov-függvény létezéséből következik, hogy a (42) rendszer aszimptotikusan stabil az origóban.

2.5.1. Tétel. [2] Legyen $\Delta = \text{co}(\Delta_0)$, és a (42) lineáris paraméteres rendszer, mely a paramétertől affín módon függ. A (42) rendszer akkor és csak akkor kvadratikusan stabil, ha létezik egy pozitív definit, szimmetrikus P mátrix, hogy a

$$A(\delta)^T P + PA(\delta) < 0 \quad (44)$$

Ljapunov-egyenlőtlenség teljesül minden $\delta \in \Delta_0$ paraméterértékre.

Amikor egy kvadratikus Ljapunov-függvény keresésével bizonyítjuk a kvadratikus stabilitást, nem teszünk különbséget a rendszerek között aszerint, hogy azok időben gyorsan, vagy lassan változnak. A paraméteres rendszerek ezen tulajdonságát figyelembe vevő módszerek paraméterről függő $V : \Omega \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ Ljapunov-függvényt keresnek

$$V(x, \delta) := x^T P(\delta)x \quad (45)$$

alakban, ahol a $P(\delta)$ pozitív definit mátrix függ a paraméterről. Ennek egy speciális esete, ha a Ljapunov-függvény affín módon függ a δ paramétertől, tehát a Ljapunov-mátrix a következő alakú:

$$P(\delta) = P_0 + \delta_1 P_1 + \dots + \delta_l P_l \quad (46)$$

Ezekkel a stabilitásvizsgáló módszerekkel a diplomamunkában már nem foglalkozunk.

2.6. A felhasznált matematikai eszközök

A következő két alfejezetben összefoglaljuk a dolgozatban felhasznált matematikai eszközöket.

2.6.1. Linearizálás

A lineáris rendszerek fontosságát az adja, hogy vizsgálatuk lényegesen könnyebb, mint a nemlineáris rendszereké. Bizonyos simasági feltételek mellett a nemlineáris rendszerek adott megoldások környezetében (lokálisan) linearizálhatók [5].

Egy folytonos idejű nemlineáris rendszert a következő állapotegyenlettel írhatunk le:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= H(t, x(t), u(t)) \quad , \end{aligned} \quad (47)$$

ahol $x(t) \in \mathbb{R}^n$ az állapot, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ az irányítás és $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a kimenet vektora. Jelölje $\xi(t) = \xi(t; t_0, x_0, u)$ a (47) rendszer $u(\cdot)$ irányítás melletti $\xi(t_0) = \xi(t_0; t_0, x_0, u) = x_0$ kezdetiértéket felvevő megoldását. Ekkor az $(x_0 + z_0) \in \mathbb{R}^n$ kezdetiérték feltételt kielégítő $(u + v)$ vezérlés melletti megoldás: $\zeta(t) = \zeta(t; t_0, x_0 + z_0, u + v)$. Tegyük fel, hogy F és H az x és u változóiban elegendően sokszor differenciálható függvények, ekkor alkalmazható a Taylor-formula a $\xi(\cdot)$ és az $u(\cdot)$ körül:

$$\begin{aligned} F(t, \zeta(t), u(t) + v(t)) &= F(t, \xi(t), u(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, \xi(t), u(t))(\zeta(t) - \xi(t)) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u}(t, \xi(t), u(t))v(t) + \text{magasabb rendű tagok} \end{aligned} \quad (48)$$

ahol az F függvény x és u szerinti Jacobi-mátrixa:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

A ζ és ξ definíciójából következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\zeta(t) - \xi(t)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, \xi(t), u(t))(\zeta(t) - \xi(t)) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial u}(t, \xi(t), u(t))v(t) + \text{magasabb rendű tagok} \end{aligned} \quad (50)$$

Legyen $z(t) = \zeta(t) - \xi(t)$, $A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \xi(t), u(t))$ és $B(t) = \frac{\partial F}{\partial u}(t, \xi(t), u(t))$, ekkor a magasabb rendű tagok elhagyásával kapjuk a következő lineáris rendszert:

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v(t), \quad z(t_0) = z_0. \quad (51)$$

A (47) rendszer kimeneti függvényét analóg módon sorbafejthetjük. Legyenek a következő mátrixfüggvények: $C(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(t, \xi(t), u(t))$ és $D(t) = \frac{\partial H}{\partial u}(t, \xi(t), u(t))$, így ismét elhanyagolva a magasabb rendű tagokat az

$$y(t) = C(t)z(t) + D(t)v(t) \quad (52)$$

kimeneti függvény linearizáltjához jutottunk.

Linearizáljuk a következő folytonos idejű, bemenet és kimenet függvényében adott (input-affin) nemlineáris rendszert egy adott $u(\cdot) = u^0$ vezérléshez tartozó x^0 egyensúlyi helyzete körül [15]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(t, x(t), u(t)) := f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= H(t, x(t), u(t)) := h(x(t)) .\end{aligned}\tag{53}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - x^0 , \quad \tilde{y}(t) = y(t) - h(x^0) \quad \text{és} \quad \tilde{u}(t) = u(t) - u^0 .\tag{54}$$

A fent leírtak alapján linearizált időinvariáns állapotegyenlet az alábbi:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x^0, u^0)\tilde{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial u}(x^0, u^0)\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x^0)\tilde{x}(t) .\end{aligned}\tag{55}$$

Legyen

$$\tilde{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^0)u^0, \quad \tilde{B} = g(x^0), \quad \tilde{C} = \frac{\partial h}{\partial x}(x^0) .\tag{56}$$

Ekkor az (55) rendszer az alábbi folytonos, lineáris, időinvariáns állapotegyenletté alakítható át:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) .\end{aligned}\tag{57}$$

2.6.2. Lineáris mátrixegyenlőtlenségek (LMI)

Lineáris mátrixegyenlőtlenségekkel könnyen leírható számos irányításelméleti, távközlési, jelfeldolgozási és statisztikai probléma. A lineáris mátrixegyenlőtlenségek a következő alakban írhatók fel [1, 2, 16, 17]:

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 ,\tag{58}$$

ahol $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, az $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, m$ szimmetrikus mártixok adottak, az $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ pedig a döntési változó. Az (58) egyenlőtlenség pozitív definitiséget jelent, azaz $\forall u \neq 0, u \in \mathbb{R}^n$ esetén az $u^T F(x) u > 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ezzel ekvivalens definíciója a pozitív definitiségnek, hogy $F(x)$ minden sajátértéke pozitív minden $x \in \mathbb{R}^m$ esetén.

A későbbiekben felhasználjuk az F affin leképezés definícióját, mely a következő:

2.6.1. Definíció. [2] Legyen \mathbb{V}_1 és \mathbb{V}_2 vektortér, ekkor egy $F : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ **leképezést affinnak** nevezzük, ha $F(x) = T_0 + T(x)$, ahol $T_0 \in \mathbb{V}_2$ és $T(x) : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ lineáris leképezés, azaz

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) , \quad (59)$$

ahol $x_1, x_2 \in \mathbb{V}_1$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{V}_2$.

2.6.2. Definíció. [2] **(LMI) Lineáris mátrixegyenlőtlenségnek** nevezzük azt az egyenlőtlenséget, mely $F(x) > 0$ alakban írható, ahol $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{S}$ affín leképezés, \mathbb{S} a valós szimmetrikus mátrixok halmaza, azaz $\exists n > 0$ melyre $\mathbb{S} := \{M \mid M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$, \mathbb{V} pedig véges dimenziós vektortér.

A fenti lineáris mátrixegyenlőtlenségek fontos tulajdonsága, hogy az egyenlőtlenséget kielégítő x döntési változók konvex halmazt alkotnak. Tehát

$$K := \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) > 0\} \quad (60)$$

konvex. Valóban, ha $x, y \in K$ és $\lambda \in [0, 1]$, akkor

$$\begin{aligned} F(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= F_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i) = \\ &= \lambda F_0 + (1 - \lambda)F_0 + \lambda \sum_{i=1}^m x_i F_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^m y_i F_i = \\ &= \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) > 0 . \end{aligned} \quad (61)$$

Megjegyezzük, hogy az $F(x) < 0$ alakban felírt lineáris mátrixegyenlőtlenség ekvivalens a $-F(x) > 0$ alakú egyenlőtlenséggel, az $F(x) > G(x)$ lineáris mátrixegyenlőtlenség pedig az $F(x) - G(x) > 0$ alakú egyenlőtlenséggel [2].

Az (58) lineáris mátrixegyenlőtlenség ekvivalens n darab polinomegyenlőtlenséggel [1], melyekben x az ismeretlen. Ennek belátásához felhasználjuk, hogy egy $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix pozitív definit akkor és csak akkor, ha minden főminorának determinánsa pozitív, azaz:

$$a_{11} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0, \dots, \det(A) > 0 . \quad (62)$$

Ezt az (58) lineáris mátrixegyenlőtlenségre alkalmazva a következőt kapjuk:

$$F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11} > 0 , \quad (63)$$

$$(F_{0,11} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,11})(F_{0,22} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,22}) - (F_{0,12} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,12})(F_{0,21} + \sum_{i=1}^m x_i F_{i,21}) > 0 , \quad (64)$$

$$\det \begin{pmatrix} F(x)_{11} & \dots & F(x)_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ F(x)_{k1} & \dots & F(x)_{kk} \end{pmatrix} > 0 , \quad (65)$$

$$\vdots$$

$$\det(F(x)) > 0 . \quad (66)$$

Megfigyelhetjük, hogy a (63) egyenlőtlenség lineáris, a (64) egyenlőtlenség kvadratikus s végül a (65) egyenlőtlenség k -ad, míg a (66) egyenlőtlenség n -ed rendű.

További fontos tulajdonság, hogy egy lineáris mátrixegyenlőtlenség-rendszer felírható egy lineáris mátrixegyenlőtlenségként is. Ugyanis

$$F^1(x) > 0, F^2(x) > 0, \dots, F^q(x) > 0 \quad (67)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i := \begin{pmatrix} F^1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F^2(x) & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & F^q(x) \end{pmatrix} > 0 , \quad (68)$$

ahol $F_i = \text{diag}\{F_i^1, F_i^2, \dots, F_i^q\}$, $i = 0, \dots, m$. Az állítás könnyen bizonyítható, hiszen tudjuk, hogy a blokkdiagonális mátrix sajátértékeinek halmaza a blokkmátrixok sajátértékeinek halmazának uniója.

Számos fontos irányításméleti probléma közül az autonóm lineáris rendszer aszimptotikus stabilitásának kérdése is visszavezethető lineáris mátrixegyenlőtlenség megoldhatóságának problémájára. Adott egy autonóm lineáris rendszer időinvariáns állapotegyenlete az

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (69)$$

alakban, ahol $x(t) \in \mathbb{R}^n$ az állapotvektor, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ valós mátrix. A 2.3.4. tétel értelmében a (69) rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha létezik $P > 0$ pozitív definit, szimmetrikus mátrix, melyre az

$$A^T P + PA < 0 \quad (70)$$

Ljapunov-egyenlőtlenség megoldható. Ezen feltételek ekvivalensek a következő lineáris mátrixegyenlőtlenség megoldhatóságának problémájával:

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -A^T P - PA \end{pmatrix} > 0 . \quad (71)$$

2.7. A felhasznált számítástechnikai eszközök

2.7.1. A MATLAB LMI Toolbox

A MATLAB LMI Toolbox [1, 2, 8, 17] lineáris mátrixegyenlőtlenségek kezelésére szolgáló programcsomag, melynek használatával a lineáris mátrixegyenlőtlenségek megoldásával kapcsolatos problémákat tudunk kezelni. Ezek közül három általános példát sorolunk fel:

- **Megoldhatósági probléma (feasibility):** Létezik-e az $F(x) > 0$ lineáris mátrixegyenlőtlenséget kielégítő $x \in \mathbb{R}^n$ vektor?
- **Optimalizációs probléma:** Minimalizáljuk az $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a

$$K := \{x \in \mathbb{R}^m \mid F(x) > 0\} \quad (72)$$

halmazon.

- **Általános sajátérték-probléma:** Minimalizáljuk a $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárt úgy, hogy teljesüljenek a

$$\lambda F(x) - G(x) > 0, \quad F(x) > 0 \quad \text{és} \quad H(x) > 0 \quad (73)$$

lineáris mátrixegyenlőtlenségek.

A megoldhatósági probléma megoldásakor a Toolbox egy belső célfüggvényt minimalizál belsőpontos vagy ellipszoid algoritmussal, így eredményként egy LMI-t kielégítő megoldást kapunk, ha létezik ilyen. Számunkra az első két típusú probléma lényeges, hiszen a közös kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozás ezekre a problémákra visszavezethető. Ezeket a kérdéseket részletesen a következő fejezetben tárgyalunk.

Ezen túlmenően a Toolbox segítségével autonóm lineáris paraméter változós (LPV) rendszerhez tudunk keresni kvadratikussá stabilitást biztosító Ljapunov-függvényt (ha létezik ilyen).

2.7.2. Konvex tartományok ábrázolása MATHEMATICA program segítségével

A lineáris mátrixegyenlőtlenségek könnyen megoldhatók MATHEMATICA programmal is. Ábrázolható grafikonon is egy LMI-t kielégítő összes lehetséges vektor természetesen csak akkor, ha a megoldások egy, két vagy három dimenziós vektorok. A 2.6.2. fejezet alapján egy LMI ekvivalens n darab polinom egyenlőtlenséggel, így a megoldást megkapjuk az egyenlőtlenségek megoldásainak metszeteként. A metszethalmaz szintén konvex halmaz (2.1. fejezet).

3. Kontrol Ljapunov-függvényen alapuló szabályozótervezés

Kontrol Ljapunov-függvényen alapuló szabályozótervezésnél egy adott rendszerhez előre előírjuk a visszacsatolt rendszer Ljapunov-függvényét és keresünk egy visszacsatolást, mellyel ez megvalósul.

3.1. Lineáris rendszer szabályozása visszacsatolással adott kontrol Ljapunov-függvénnyel

Először kimenet nélküli lineáris időinvariáns rendszert stabilizálunk visszacsatolással kontrol Ljapunov-függvény segítségével. Egy

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (74)$$

alakban adott lineáris időinvariáns rendszerhez $(x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m})$ és egy tetszőlegesen választott

$$V(x) = x^T P x, \quad P > 0 \quad (75)$$

alakú kontrol Ljapunov-függvényhez keressük az összes

$$u(t) = Kx(t) \quad (76)$$

alakú lineáris teljes, statikus állapot visszacsatolást. A keresett $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixoknak egy lineáris mátrixegyenlőtlenséget kell kielégíteniük, mely a (29) Ljapunov-egyenlőtlenségből származtatható a 2.3.1. következmény alapján az

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < 0 \quad (77)$$

alakban. A 2.6.2. fejezetben beláttuk, hogy az LMI megoldásaként kapott halmaz konvex halmaz.

A fenti lineáris mátrixegyenlőtlenség megoldásához programozási felületként a MATLAB LMI Toolboxot és a MATHEMATICA programot használjuk (2.7. fejezet). Ezen szabályozótervezés polinomiális idejű, mert lineáris mátrixegyenlőtlenség megoldását jelenti az állapot és a bemenet korlátozása mellett is [2, 16].

3.1.1. Példa. Adott egy kimenet nélküli, folytonos, lineáris rendszer a következő alakban:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u(t) , \quad (78)$$

ahol $x(t) \in \mathbb{R}^2$ az állapotváltozó és $u(t) \in \mathbb{R}$ az irányítás. A feladat stabilizáló állapot visszacsatolás tervezése $u(t) = Kx(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$ alakban a

$$V(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \quad (79)$$

kontrol Ljapunov-függvényhez. Megjegyezzük, hogy a (78) rendszer irányítás nélkül ($u(t)=0$ bemenettel) nem aszimptotikusan stabil, mert az A mátrix sajátértékei: $(1 \pm 2,4495i)$. Lineáris rendszerek irányíthatóságának szükséges és elégséges feltétele a Kalman-féle rangfeltétel [5, 7], ami ebben a példában teljesül, ugyanis

$$\text{rang } [B, AB] = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = 2 . \quad (80)$$

Tehát megadható olyan vezérlés, mellyel a (78) rendszer trajektóriái tetszőleges állapotból véges időn belül adott állapotba vihetők.

Keressük azokat a (k_1, k_2) párokat, melyekkel stabilizáló visszacsatolás tervezhető. Tudjuk a 2.3.4. tétel alapján, hogy a zárt rendszer aszimptotikusan stabil akkor és csak akkor, ha találunk olyan kontrol Ljapunov-függvényt, melyre az algebrai Ljapunov-egyenlőtlenség megoldható. Ez a szükséges és elégséges feltétel megfogalmazható lineáris mátrixegyenlőtlenségként (77) alakban. Ebben a feladatban előre megadott (79) kontrol Ljapunov-függvényhez keressük azokat a (k_1, k_2) párokat, melyekre a zárt rendszer aszimptotikus stabilitását biztosító (77) egyenlet alapján felírható

$$-\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \end{pmatrix} \right) > 0 \quad (81)$$

lineáris mátrix egyenlőtlenség teljesül. A kijelölt műveletek elvégzése után a (81) egyenlet a következő egyszerű alakban írható fel:

$$\begin{pmatrix} 4k_1 + 10 & -5k_1 + 2k_2 - 9 \\ -5k_1 + 2k_2 - 9 & -10k_2 - 6 \end{pmatrix} > 0 , \quad (82)$$

mely LMI-vel kifejezve a következő:

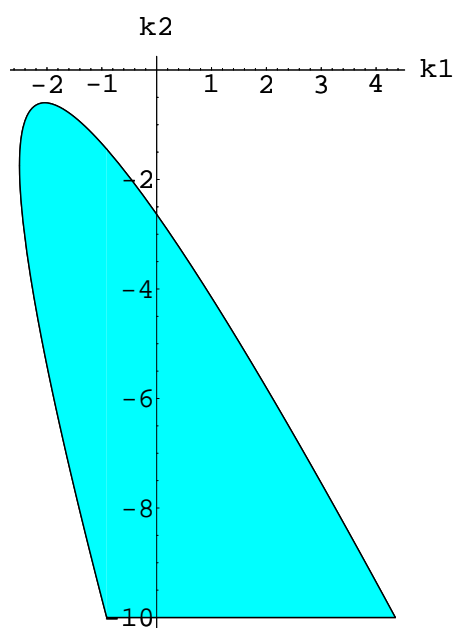
$$\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} > 0 . \quad (83)$$

A 2.6.2. fejezet alapján a (82) LMI felírható két polinomegyenlőtlenségként a

$$\begin{aligned} 4k_1 + 10 &> 0, \\ -141 - 114k_1 - 25k_1^2 - 64k_2 - 20k_1k_2 - 4k_2^2 &> 0 \end{aligned} \quad (84)$$

alakban.

MATHEMATICA programmal számolt, (84) feltételeket kielégítő (k_1, k_2) párokat a 14. ábra szemlélteti.



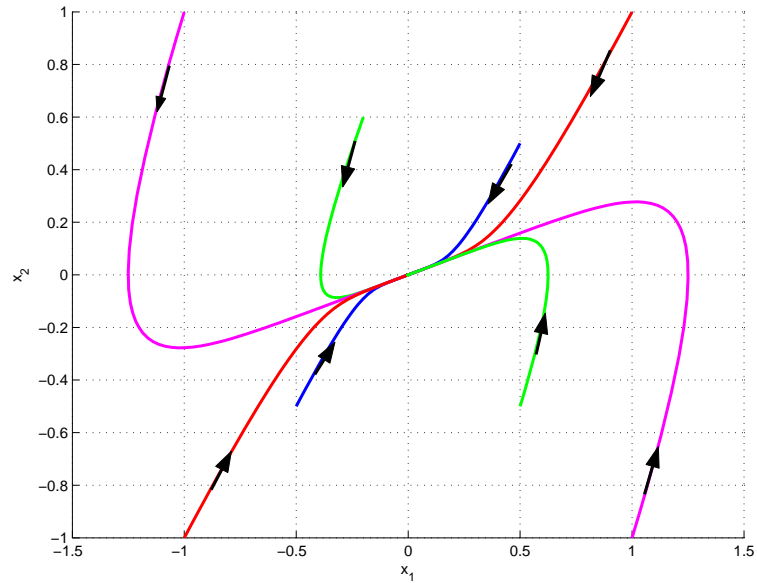
1. ábra. A (78) rendszer visszacsatolási tartománya

A visszacsatolási tartomány konvex halmaz, hiszen ezen pontok egy lineáris mátrix-egyenlőtlenség megoldásai.

Vizsgáljuk meg a kapott tartomány egy pontja által meghatározott visszacsatolást. Legyen ez a pont a $(k_1, k_2) = (-1, -4)$ és a visszacsatolás $u(t) = -x_1(t) - 4x_2(t)$, ekkor a zárt rendszer a következő alakú:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1 \quad -4) x(t) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} x(t) . \quad (85)$$

Ezzel a visszacsatolással stabilizáltuk a (78) rendszert, hiszen a (85) visszacsatolt rendszer A rendszer mátrixa stabil mátrix, sajátértékei: $(-1, 5949; -9, 4051)$. Szemléltetésként kirajzoljuk a (85) visszacsatolt rendszer trajektóriáit különböző kezdeti értékek mellett MATLAB program segítségével (2. ábra). Látható, hogy minden megoldásgörbe az egyensúlyi pontba (az origóba) tart.

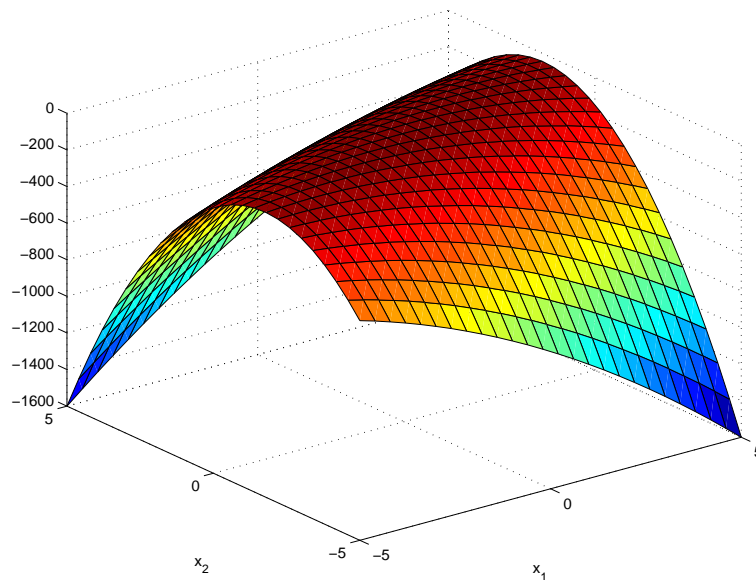


2. ábra. A visszacsatolt (85) rendszer trajektóriái

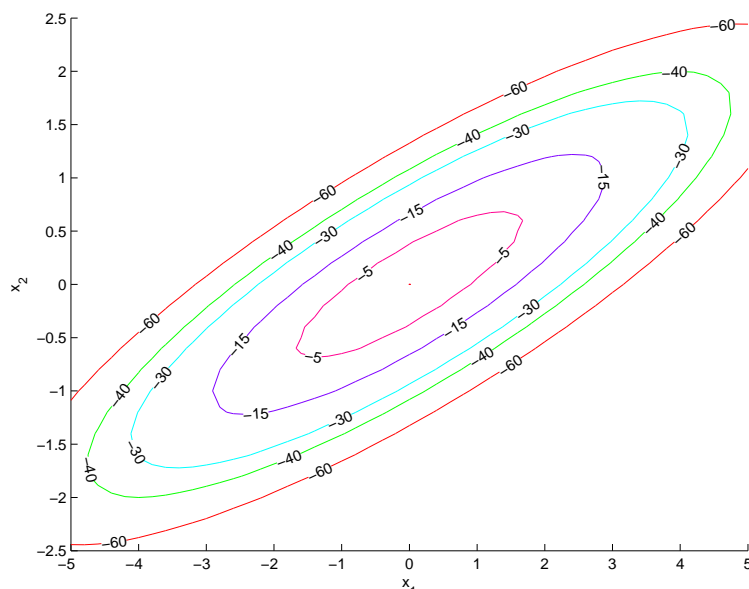
A (79) kontrol Ljapunov-függvény kielégíti a 2.6.2 definícióban szereplő feltételeket, ugyanis a (78) rendszer szerinti deriváltja negatív definit:

$$\dot{V}_{(85)}(x) = 2x_1\dot{x}_1 - 2\dot{x}_1x_2 - 2x_1\dot{x}_2 + 4x_2\dot{x}_2 = -6x_1^2 + 24x_1x_2 - 34x_2^2, \quad (86)$$

melynek grafikonja a 3. ábrán, szintvonalai pedig a 4. ábrán látható x_1 és x_2 függvényében



3. ábra. A (79) kontrol Ljapunov-függvény (78) rendszer szerinti deriváltja



4. ábra. A (79) kontrol Ljapunov-függvény (78) rendszer szerinti deriváltjának szintvonalai

3.2. Nemlineáris rendszerek szabályozása

A nemlineáris rendszerek osztályán belül először a szakaszonként affin lineáris hibrid részosztályt vizsgáljuk, és csak később tárgyaljuk az egyéb nemlineáris rendszerek osztályának szabályozását.

3.2.1. Közös kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozás PWA hibrid rendszerekre

A hibrid rendszerek osztályán vizsgáljuk az

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, \dots, k \quad (87)$$

speciális alakú szakaszonként affin lineáris (PWA) rendszereket. Ezen rendszerhez kvadratikus kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozó tervezhető a 2.4.1 tétel szerint $u(t) = Kx(t)$ alakban úgy, hogy a következő feladatot oldjuk meg.

Adott egy közös kvadratikus

$$V(x) = x^T P x \quad (88)$$

kontrol Ljapunov-függvény, melyhez keresendő olyan K mátrix, mely az

$$(A_i + BK)^T P + P(A_i + BK) < 0 \quad (89)$$

egyenleteket kielégíti minden $i = 1, \dots, k$ esetén.

A következő példában egy kétdimenziós, szakaszonként lineáris rendszert stabilizálunk, melynek dinamikája az állapotvektor második komponensétől függ.

3.2.1. Példa. Adott egy szakaszonként lineáris

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u(t), \quad i = 1, 2 \quad (90)$$

rendszer, ahol $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$ az állapotvektor, $u(t) \in \mathbb{R}$ az irányítás és

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (91)$$

a rendszermátrixok. Irányítás nélkül ($u(t) = 0$ bemenettel) az első részrendszer aszimptotikusan stabil, hiszen A_1 mátrix kétszeres sajátértéke a -1 , viszont a második részrendszer nem stabil, ugyanis az A_2 mátrix sajátértékei: $(2, -4)$. A konvex poliéderek a következők:

$$\Omega_1 = \{x \mid x_2 \geq 0\}, \quad \Omega_2 = \{x \mid x_2 \leq 0\} \quad (92)$$

A feladat stabilizáló állapot visszacsatolás tervezése $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$ alakban a

$$V(x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \quad (93)$$

kontrol Ljapunov-függvényhez.

Először vizsgáljuk külön a két rendszert. Ekkor az első alrendszer

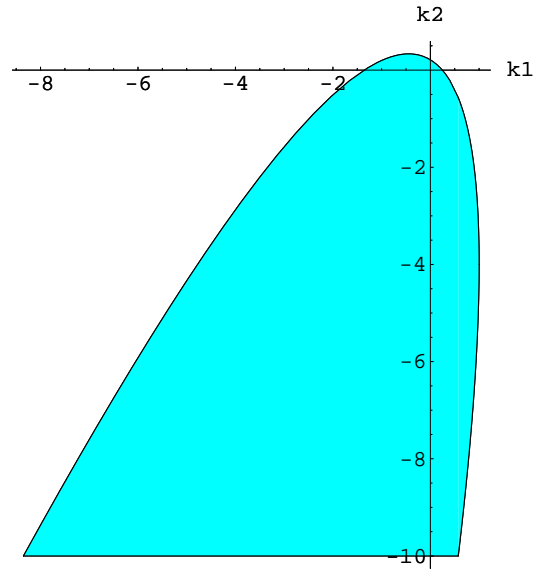
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u(t) \quad (94)$$

alakban írható fel, melynek egyensúlyi pontja az $x = (0, 0)$ állapot az $u(t) = 0$ irányítás mellett. A 3.1.1. példa alapján a MATHEMATICA program segítségével az 5. ábrán látható konvex tartományt kapjuk megoldásként. Vizsgáljuk a $(k_1, k_2) = (-4, -4)$ pont által meghatározott $u(t) = -4x_1(t) - 4x_2(t)$ visszacsatolást, ekkor a zárt alrendszer a következő dinamikát adja:

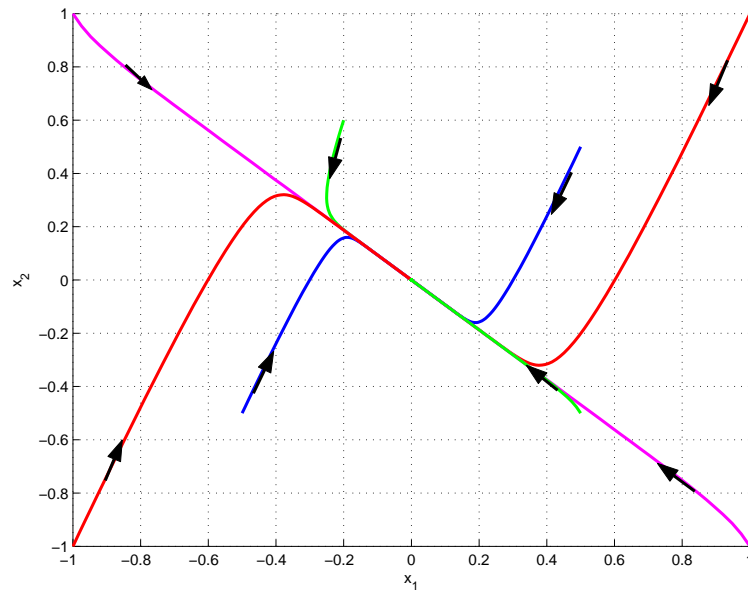
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-4 \quad -4) x(t) = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -11 & -13 \end{pmatrix} x(t) . \quad (95)$$

Ahol az A rendszermátrix sajátértékei: $(-1, 2540; -16, 7460)$, így a zárt rendszer szintén aszimptotikusan stabil.

A 6. ábrán szemléljük a (95) visszacsatolt rendszer néhány trajektóriáját a fázistérben. A megoldásgörbék szintén az egyensúlyi pontba tartanak.



5. ábra. A (94) alrendszer visszacsatolási tartománya



6. ábra. A visszacsatolt (95) alrendszer trajektóriái

A második alrendszer az

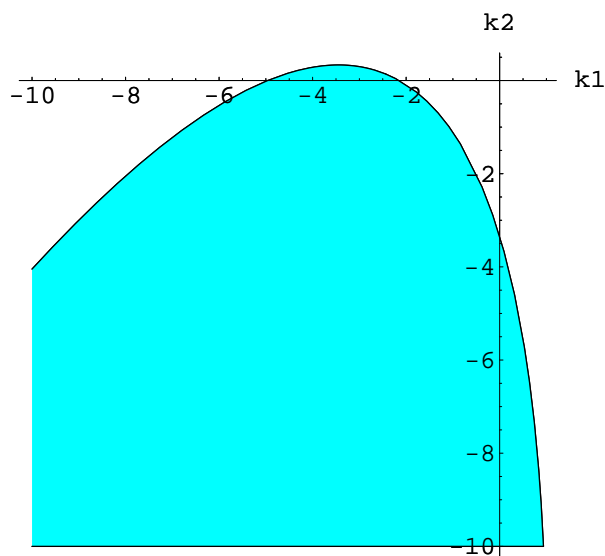
$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} u(t) \quad (96)$$

alakban írható fel, melynek egyensúlyi pontja szintén az $x^0 = (0, 0)$ állapot az $u(t) = 0$ irányítás mellett. A 7. grafikonon ábrázolja a stabilizáló irányítások halmazát k_1 és k_2 függvényében. Vizsgáljuk ismét a $(k_1, k_2) = (-4, -4)$ pont által meghatározott $u(t) =$

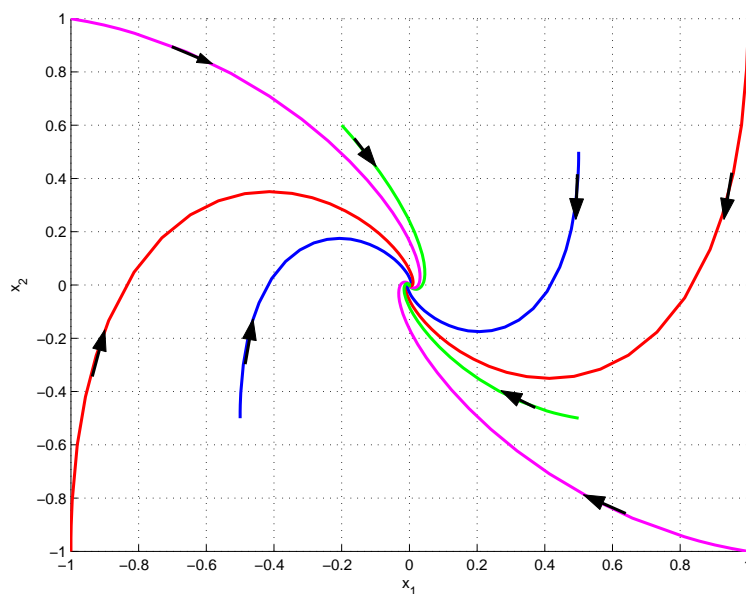
$-4x_1(t) - 4x_2(t)$ visszacsatolást, ekkor a (96) zárt alrendszer a következő dinamikát adja:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-4 \quad -4) x(t) = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -11 & -13 \end{pmatrix} x(t) , \quad (97)$$

ahol az A mátrix sajátértékei: $(-9 \pm 6,245i)$, így a zárt rendszer szintén aszimptotikusan stabil. A különböző kezdetiértékekből indított megoldások fázisportróját a 8. ábrán láthatjuk. Ezen megoldásgörbék szintén az origóba tartanak.

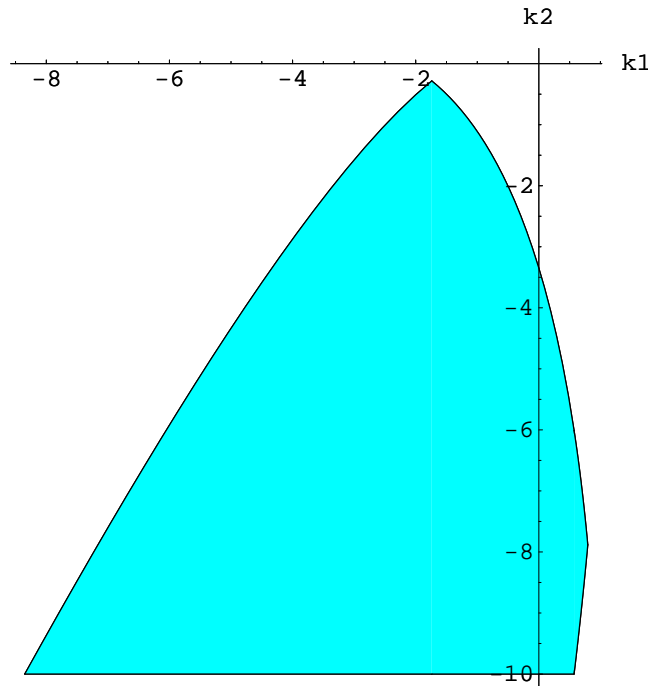


7. ábra. Az (96) alrendszer visszacsatolási tartománya



8. ábra. A visszacsatolt (97) alrendszer trajektóriái

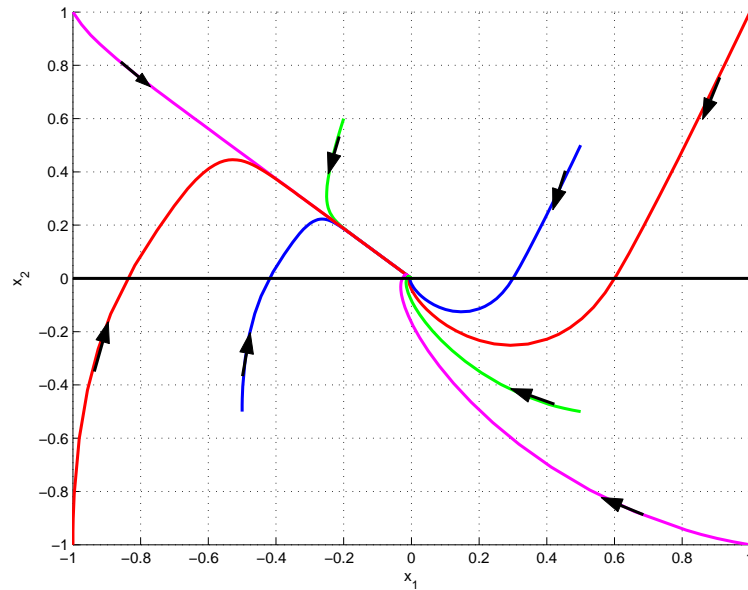
A továbbiakban keressük meg azokat a K visszacsatoló mátrixokat, melyekkel a (90) hibrid rendszer stabil lesz. Erre megoldásként az előző két tartomány metszetét kaptuk (9. ábra). Konvex halmazok metszete is konvex halmaz, így a hibrid rendszert stabilizáló visszacsatolások halmaza is konvex halmaz.



9. ábra. A (90) hibrid rendszer visszacsatolási tartománya

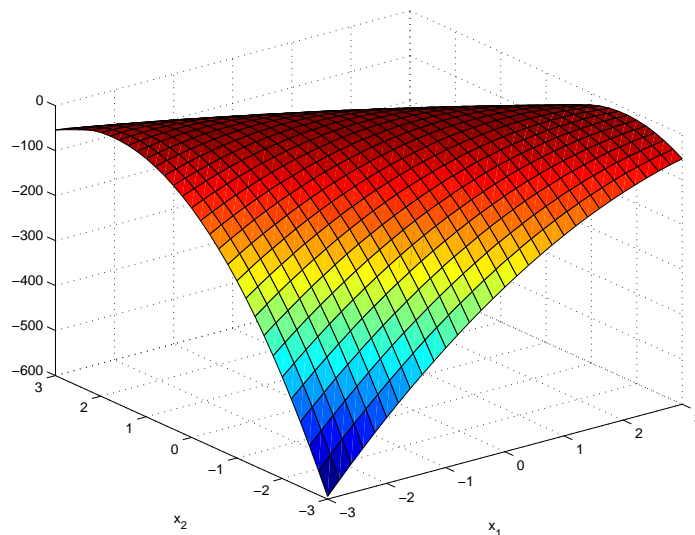
Válasszunk egy visszacsatolást a közös 9. tartományból, legyen ez a visszacsatolás az $u(t) = -4x_1(t) - 4x_2(t)$. A visszacsatolt hibrid rendszer trajektóriáit ábrázoljuk (10. ábra) a fazissíkon különböző kezdőállapotok mellett.

A 10. ábrán megfigyelhetjük, hogy az Ω_1 konvex poliéderből indított megoldásgörbék az $x_2 = 0$ egyenes átlépéséig a (95) rendszer dinamikáját követik, míg az Ω_2 konvex poliéderből indított megoldásgörbék az $x_2 = 0$ egyenesig a (97) rendszer dinamika szerint haladnak.

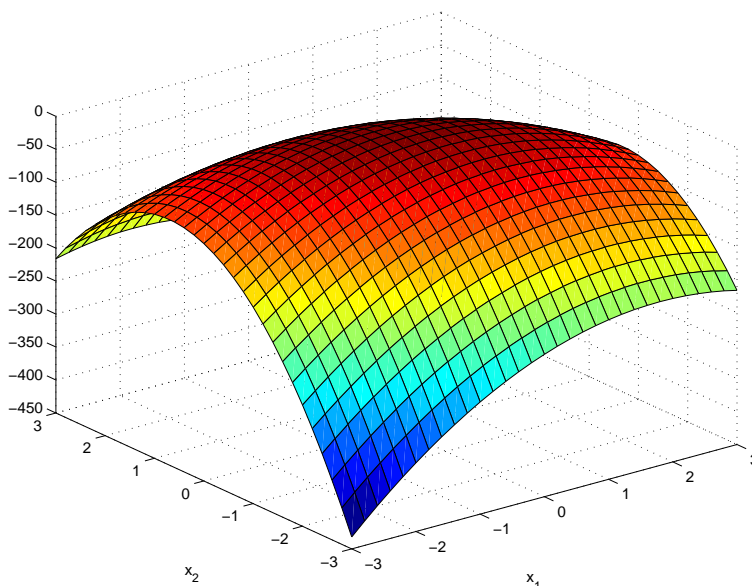


10. ábra. A (90) visszacsatolt hibrid rendszer fázisképe

Vizsgáljuk meg, hogy a (93) közös kontrol Ljapunov-függvény valóban Ljapunov-függvény-e mindkét rendszerhez! A 11. ábrán a függvény visszacsatolt (94) rendszer szerinti deriváltjának, míg a 12. ábrán (96) rendszer szerinti deriváltjának grafikonja látható. Az ábrák mutatják, hogy a rendszer szerinti deriváltak negatív definiték, így a (93) függvény valóban a hibrid rendszer Ljapunov-függvénye .



11. ábra. A (93) kontrol Ljapunov-függvény visszacsatolt (94) rendszer szerinti deriváltja



12. ábra. A (93) kontrol Ljapunov-függvény visszacsatolt (96) rendszer szerinti deriváltja

3.2.2. További nemlineáris rendszerek szabályozása

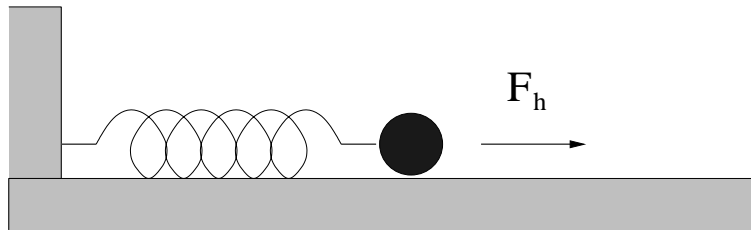
Egy folytonos állapotfüggvényekkel bíró nemlineáris rendszert szakaszonként lineáris rendszerrel approximáljuk az állapottér belsejében diszjunkt halmazokra bontásával. A lineáris rendszerekkel való közelítést például adott megoldás (általában egyensúlyi állapot) környezetében linearizálással végezhetjük (lásd a 2.6.1. fejezetben). Az így kapott rendszert a P és a K mátrixok egyenletes megválasztásával szabályozzuk, hiszen szakaszonként lineáris (PWA) rendszert kapunk, melyhez az előző fejezet alapján tudunk konstruálni közös kontrol Ljapunov-függvényen alapuló szabályozót. Erre az esetre a következő fejezetben mutatunk szemléletes példát.

4. Esettanulmány

Ebben a fejezetben egy erősen nemlineáris fizikai példán mutatjuk be a kontrol Ljapunov-függvényen alapú szabályozást.

4.1. A fizikai rendszer leírása

Adott egy súrlódó rezgőrendszer, melyben egyik oldalán rögzített rugó hat egy alátámasztott testre. Feladatunk ennek a súrlódó rezgőrendszernek szabályozása úgy, hogy stabilitása megmaradjon és a dinamika egy előre megadott kontrol Ljapunov-függvénynek tegyen eleget. A rugóval ellátott fizikai rendszer a 13. ábrán látható.



13. ábra. Súrlódó rezgőrendszer

Tekintsük a testet pontszerűnek, ekkor a rezgőrendszer fizikai leírása a következő: Legyen $x(t)$ a pontszerű test helyfüggvénye, $v(t)$ a sebességfüggvény, $a(t)$ a gyorsulásfüggvény, k a rugóállandó, m a test tömege, $\mu(v)$ a súrlódási együttható, $F_r(t) = -kx(t)$ a rugóerő, $F_s(t) = \mu(v)v(t)$ a súrlódási erő, $F_h(t) = u(t)$ a húzóerő. Ekkor a Newton-törvény alapján a következő mozgásegyenlet írható fel:

$$ma(t) = F_r(t) + F_s(t) + F_h(t) . \quad (98)$$

Jelölje $x_1(t)$ a helyfüggvényt, $x_2(t)$ a sebességfüggvényt, így a (98) Newton-egyenlet a következő állapotegyenlet alakra hozható:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m}x_1(t) + \frac{\mu(x_2(t))}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t) . \end{aligned} \quad (99)$$

Legyen $k = m = 1$ és a súrlódási együttható a következő függvény:

$$\mu(x_2) = \begin{cases} 3,5 & \text{ha } x_2 \leq -10^{-5} ; \\ 3,5 \cdot 10^5 x_2 & \text{ha } -10^{-5} \leq x_2 \leq 10^{-5} ; \\ -3,5 & \text{ha } x_2 \geq 10^{-5} . \end{cases} \quad (100)$$

Ez alapján osszuk az állapotteret három partícióra, melyek legyenek

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{x \mid x_2 \leq -10^{-5}\}, \\ \Omega_2 &= \{x \mid -10^{-5} \leq x_2 \leq 10^{-5}\} \\ \text{és } \Omega_3 &= \{x \mid x_2 \geq 10^{-5}\}\end{aligned}\quad (101)$$

konvex poliéderek. A fizikai példa rendszermodellje egy nemlineáris rendszer, mely állapotter modellt a következő három állapotegyenlet írja le:

$$\text{az } \Omega_1 \text{ konvex poliéderen : } \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3,5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) , \quad (102)$$

$$\text{az } \Omega_2 \text{ sávon : } \dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (103)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 3,5 \cdot 10^5 x_2^2(t) + u(t) ,$$

$$\text{az } \Omega_3 \text{ konvex poliéderen : } \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3,5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) . \quad (104)$$

4.2. Linearizálás

Az Ω_2 tartományon értelmezett állapotegyenletet linearizáljuk a 2.6.1. fejezetben leírtak alapján az $u^0 = 0$ vezérlés mellett az $x^0 = (0, 0)$ egyensúlyi helyzete körül. A linearizálás eredményeként kapott rendszer a következő:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) . \quad (105)$$

A linearizálás segítségével a (102), a (104) és a (103) részrendszerekből álló eredeti rendszerből szakaszonként lineáris rendszert kapunk, melyhez a 3.2.1. fejezet alapján tudunk szabályozót tervezni.

4.3. A visszacsatolás nélküli hibrid rendszer stabilitása

Vizsgáljuk meg a hibrid rendszer irányítás nélküli részrendszereit stabilitás szempontjából. Tekintsük a részrendszereket az $u(t)=0$ bemenettel, így három autonóm rendszert kapunk az

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3,5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3,5 \end{pmatrix} \quad (106)$$

rendszer mátrixokkal. Az első autonóm rendszer instabil csomó, hiszen a sajátértékek pozitív valós számok: $\lambda_1(A_1) = 0,3139$; $\lambda_2(A_1) = 3,1861$. Az A_2 mátrix sajátértékei: $\pm i$, tehát ezen rendszer megoldásai centrumok. A harmadik rendszer viszont stabil csomó, hiszen $\lambda_1(A_3) = -0,3139$; $\lambda_2(A_3) = -3,1861$ sajátértékek negatív valós számok.

4.4. Kontrol Ljapunov-függvényen alapuló szabályozó tervezése

Közös kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozó tervezését többféleképpen is megtehetjük. Először a MATHEMATICA program segítségével tervezünk szabályozót.

4.4.1. Szabályozó tervezése MATHEMATICA programmal

A linearizálás eredményeként kapott szakaszonként lineáris rendszer a következő:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (107)$$

ahol $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$ az állapotvektor, $u(t) \in \mathbb{R}$ az irányítás és

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3,5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3,5 \end{pmatrix} \quad (108)$$

a rendszer mátrixok. Az állapotteret három diszjunkt részre tagoljuk, melyek az

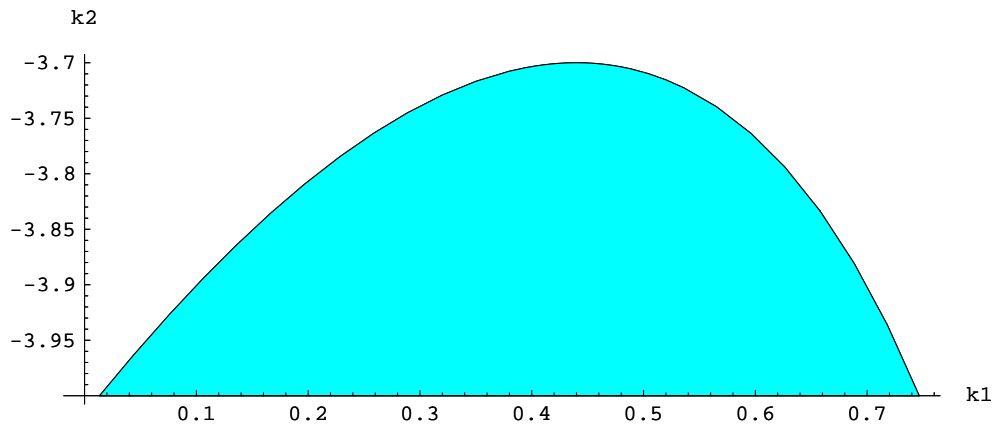
$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \mid x_2 \leq -10^{-5}\}, \\ \Omega_2 &= \{x \mid -10^{-5} \leq x_2 \leq 10^{-5}\} \\ \text{és } \Omega_3 &= \{x \mid x_2 \geq 10^{-5}\} \end{aligned} \quad (109)$$

konvex poliéderek.

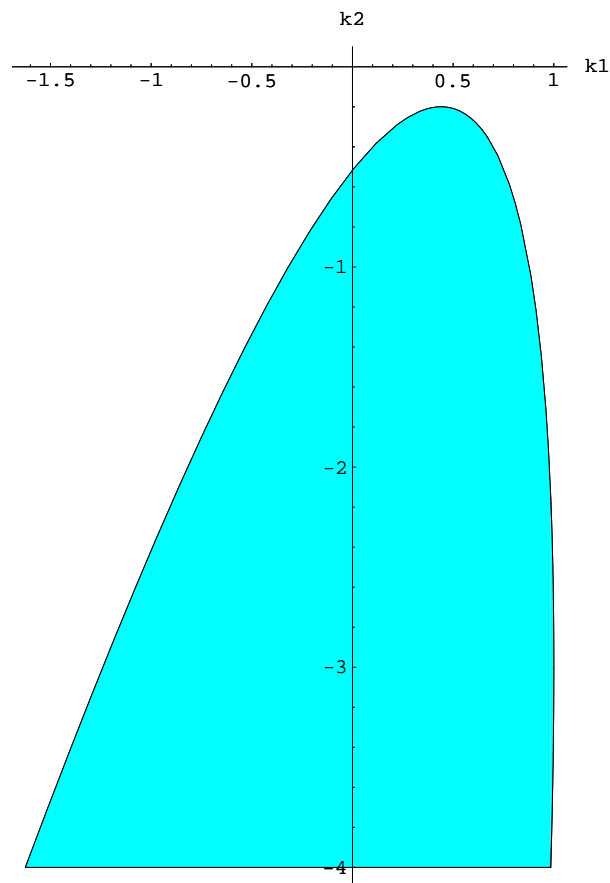
A feladat stabilizáló teljes, statikus, lineáris állapot visszacsatolás tervezése $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$ alakban a

$$V(x) = x^T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} x = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 \quad (110)$$

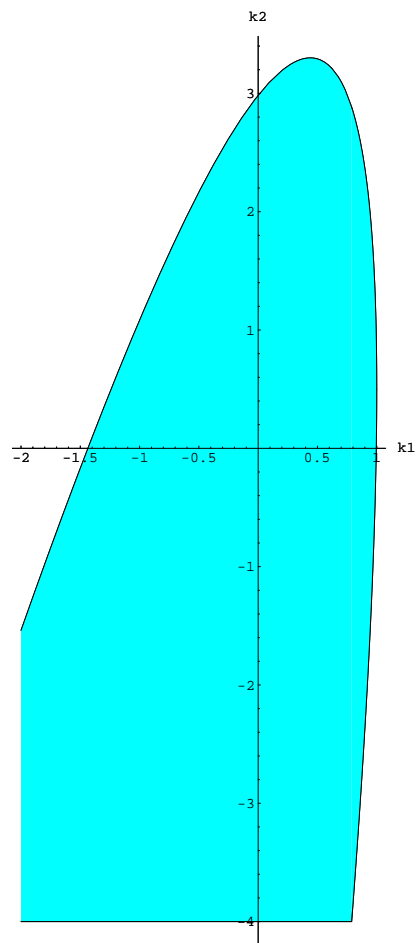
kontrol Ljapunov-függvényhez. Megjegyezzük, hogy a részrendszerek külön irányíthatók, de ez még nem garantálja, hogy a hibrid rendszer is irányítható. A 3. fejezetben tárgyaltak alapján az összes lehetséges visszacsatolást megkapjuk a 14., a 15. és a 16. ábrákon a megfelelő részrendszerekhez, míg a 17. ábrán a (107) hibrid, szakaszonként lineáris rendszerhez.



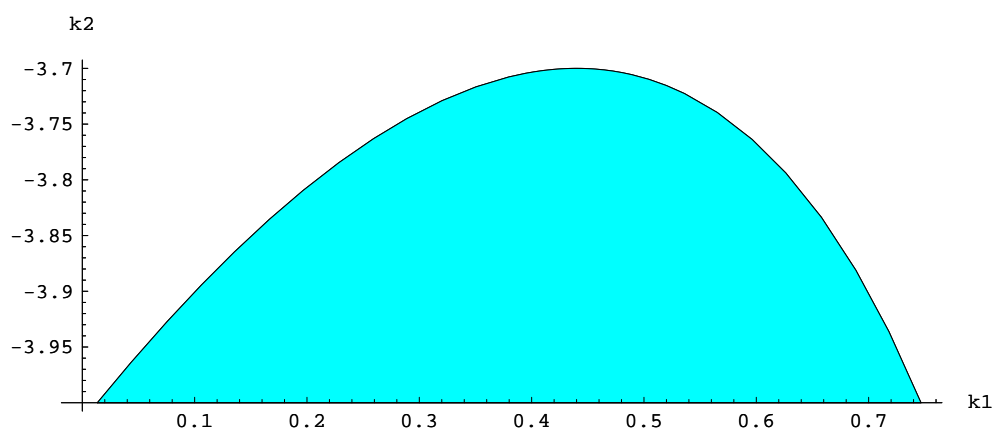
14. ábra. Az Ω_1 konvex poliéderen értelmezett alrendszer visszacsatolási tartománya



15. ábra. Az Ω_2 sávon értelmezett alrendszer visszacsatolási tartománya



16. ábra. Az Ω_3 konvex poliéderen értelmezett alrendszer visszacsatolási tartománya

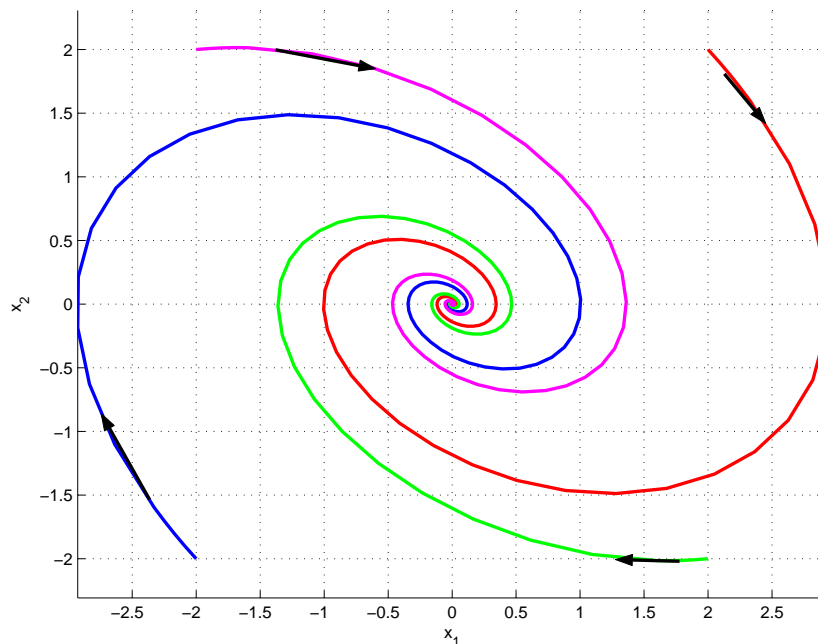


17. ábra. A szakszonként lineáris (107) hibrid rendszer visszacsatolási tartománya

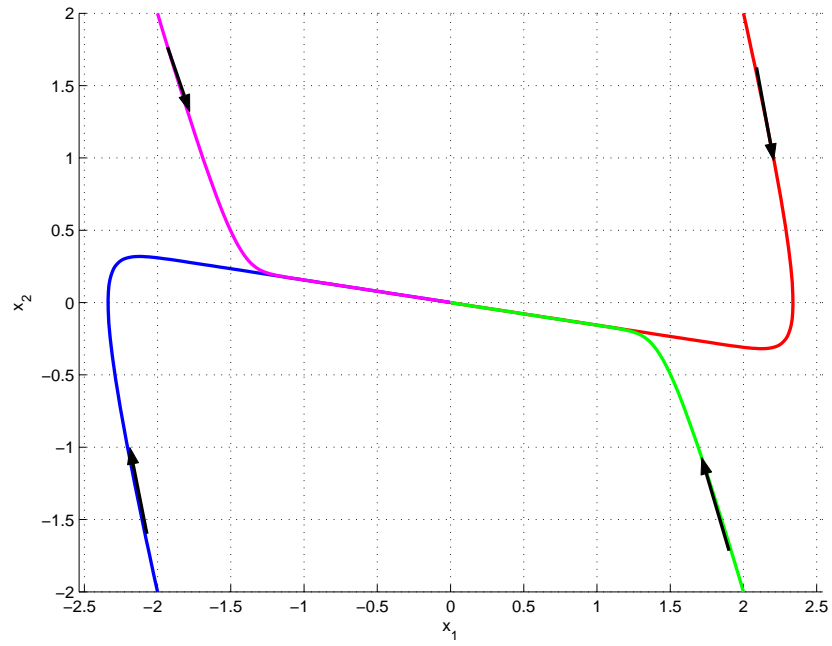
Ellenőrzésképpen válasszunk egy pontot a 17. közös visszacsatolási tartományból, és nézzük meg a visszacsatolt rendszerek illetve a hibrid rendszer fázisportréit. Legyen ez a pont a $(0, 4; -4)$ pont, melynek megfelelő visszacsatolás az $u(t) = 0,4x_1 - 4x_2$. A visszacsatolt rendszerek rendszermátrixai a következők:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -7,5 \end{pmatrix}, \quad (111)$$

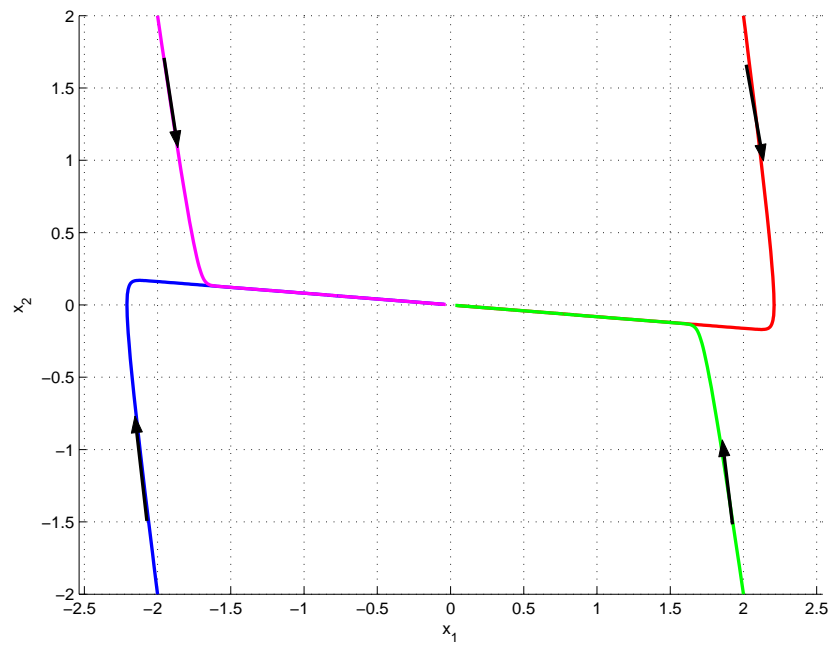
melyek sajátértékei: $\lambda_i(A_1) = -0,25 \pm 0,7331i$; $\lambda_1(A_2) = -0,1561$, $\lambda_2(A_2) = -3,8439$ és $\lambda_1(A_3) = -0,0809$, $\lambda_2(A_3) = -7,4191$, tehát valóban aszimptotikusan stabilak a visszacsatolt részrendszerek. A 18., a 19. és a 20. ábrákon láthatók a visszacsatolt alrendszerek néhány kezdetiértékből indított megoldásainak fázisportréi. A 21. ábrán láthatók a visszacsatolt hibrid rendszer megoldásgörbéi, az ábra fekete egyenesei pedig a partíciók határát jelzik.



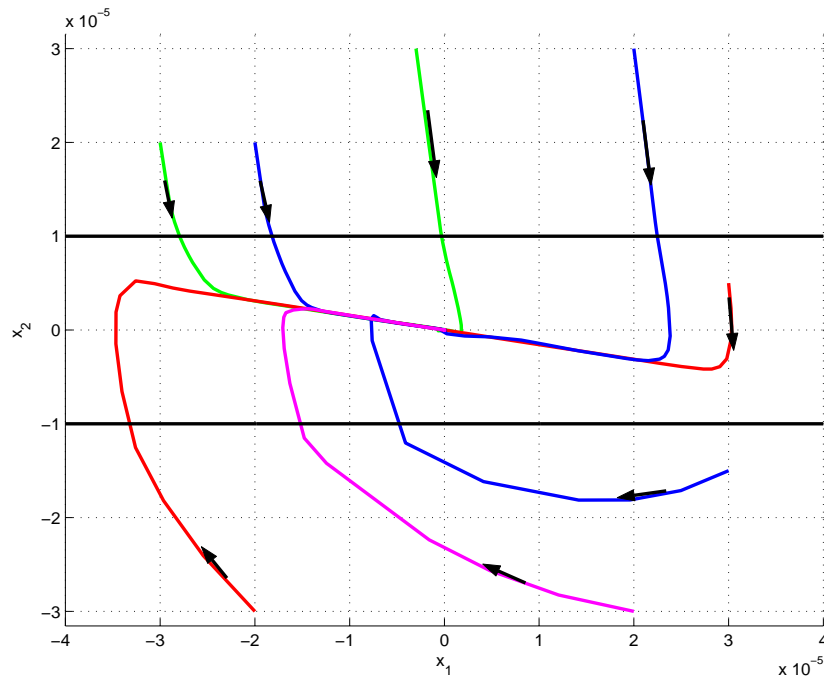
18. ábra. Az Ω_1 konvex poliéderen értelmezett visszacsatolt alrendszer fázisportréja



19. ábra. Az Ω_2 sávon értelmezett visszacsatolt alrendszer fázisportréja



20. ábra. Az Ω_3 konvex poliéderen értelmezett visszacsatolt alrendszer fázisportréja



21. ábra. A szakaszonként lineáris (107) visszacsatolt hibrid rendszer fázisportréja

Megfigyelhetjük, hogy a 21. ábrán az Ω_1 konvex poliéderből indított megoldásgörbék az $x_2 = -10^{-5}$ egyenesig az első visszacsatolt rendszer dinamikáját követik, az Ω_2 sávból indított görbék a második visszacsatolt rendszer dinamikája szerint haladnak, míg az Ω_3 konvex poliéderből indított megoldások az $x_2 = 10^{-5}$ egyenesig a harmadik visszacsatolt rendszer dinamikáját követik.

Vizsgáljuk meg a (110) Ljapunov-függvény részrendszerek szerinti deriváltjait! Az első, második és harmadik részrendszer szerinti deriváltak a következők:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(1)}(x) &= 6x_1\dot{x}_1 + 2\dot{x}_1x_2 + 2x_1\dot{x}_2 + 10x_2\dot{x}_2 = -1,2x_1 - x_1x_2 - 3x_2^2, \\ \dot{V}_{(2)}(x) &= -1,2x_1 - 8x_1x_2 - 38x_2^2, \\ \dot{V}_{(3)}(x) &= -1,2x_1 - 15x_1x_2 - 73x_2^2, \end{aligned} \quad (112)$$

melyek negatív definiték. A (110) Ljapunov-függvény tehát minden részrendszerre alkalmas Ljapunov-függvény, így az $u(t) = 0,4x_1 - 4x_2$ visszacsatolással kapott hibrid rendszer valóban aszimptotikusan stabil.

4.4.2. Szabályozás MATLAB LMI Toolbox segítségével

A feladat ismét stabilizáló teljes, statikus, lineáris állapot visszacsatolás tervezése

$u(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$ alakban szakaszonként lineáris rendszerhez, mely a következő alakú:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (113)$$

ahol $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$ az állapotvektor, $u(t) \in \mathbb{R}$ az irányítás és

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3,5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3,5 \end{pmatrix} \quad (114)$$

a rendszermátrixok. Az állapotteret három diszjunkt részre tagoljuk, melyek a belsejükben diszjunkt

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \mid x_2 \leq -10^{-5}\}, \\ \Omega_2 &= \{x \mid -10^{-5} \leq x_2 \leq 10^{-5}\} \\ \text{és } \Omega_3 &= \{x \mid x_2 \geq 10^{-5}\} \end{aligned} \quad (115)$$

konvex poliéderek. Az állapot visszacsatolást a

$$V(x) = x^T P x = x^T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} x = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 \quad (116)$$

kontrol Ljapunov-függvényhez keressük.

A zárt rendszerre alkalmazott autonóm PWA rendszerek aszimptotikus stabilitásáról szóló 2.4.1. tétel értelmében a keresett $K = (k_1; k_2)$ mátrixnak a következő egyenlőtlenségeket kell kielégítenie:

$$\left(A_i + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} K \right)^T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \left(A_i + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} K \right) > 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (117)$$

amely egyenlőtlenségeket viszont a MATLAB LMI Toolbox nem tud kezelni [2, 17].

A (113) rendszer állapotterének egy megfelelő bázistranszformációjával a (117) egyenlőtlenségeket kezelhető alakra tudjuk hozni. Legyen $Y = P^{-1}$ és $F = KY$, továbbá jelölje B a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektort, ekkor a (117) egyenlőtlenségek a következő lineáris mátrixegyenlőtlenség-rendszerként írhatók fel:

$$A_i Y + Y A_i^T + B F + F^T B > , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (118)$$

A (118) lineáris mátrixegyenlőtlenség-rendszert már tudjuk implementálni az LMI Toolbox *lmivar*, *lmiterm* parancsai segítségével. A megoldhatósági (feasibility) problémát a *feasp* nevű MATLAB parancssal oldhatjuk meg. A MATLAB belső függvényként a t skalárt maximalizálja az

$$A_i Y + Y A_i^T + B F + F^T B > t I, \quad i = 1, 2, 3 \quad (119)$$

feltételek mellett, ahol I a 2×2 -es egységmátrix. A megoldhatósági problémának akkor van megoldása, ha a t nemnegatív.

Eredményként a $K = (-0,9752; -6,8762)$ mátrix által megadott visszacsatolást kaptuk a (113) rendszerhez. Ezt a megoldást tartalmazza az előző részfejezetben visszacsatolási tartományként kapott 17. ábrán látható tartomány. A MATLAB LMI Toolbox a t belső célfüggvényt optimalizálva ellipszoid algoritmussal oldja meg az LMI-t. Előnye a MATHEMATICA programmal szemben az, hogy hatékonyan működik magasabb dimenzióban is.

4.4.3. Szabályozás LPV módon

Ebben az alfejezetben az 1.1. fejezetben tárgyalt második típusú szabályozótervezési módszert alkalmazzuk a súrlódó rezgőrendszer modelljére. Egy megsejtett visszacsatolást vizsgálunk úgy, hogy a zárt autonóm rendszerhez keresünk a MATLAB LMI Toolbox segítségével alkalmas kontrol Ljapunov-függvényt, ezzel biztosítva a zárt rendszer aszimptotikus stabilitását.

Először a (102), a (103) és a (104) részrendszerből álló hibrid rendszert kiterjesztjük, $\mu(x_2)$ súrlódási együtthatóját időfüggő egykomponensű $\delta(t)$ paraméternek tekintve. Vegyük észre, hogy ezzel a kiterjesztéssel egy lineáris paraméter változós (LPV) rendszert kaptunk, amely $\delta(t)$ paramétere az idő függvényében változik és a rendszer mátrixa a $\delta(t)$ paramétertől affin módon függ.

A 4.4.1. alfejezet eredménye alapján válasszuk az $u(t) = 0, 4x_1(t) - 4x_2(t)$ visszacsatolást, ekkor a zárt hibrid rendszerből származtatott LPV rendszer állapotér-egyenlete a következő:

$$\dot{x}(t) = A(\delta(t))x(t) , \quad (120)$$

$$\text{ahol } A(\delta(t)) = A_0 + \delta(t)A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,6 & -4 \end{pmatrix} + \delta(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (121)$$

a rendszer paramétermátrixa. A paraméter értékét egy zárt intervallumon veszi fel: $-3,5 \leq \delta(t) \leq 3,5$. A MATLAB LMI Toolbox programcsomag segítségével a (120) rendszermodell átalakítás nélkül lehet implementálni *ltisys*, *psys*, *pvec* parancsok segítségével, majd a (120) rendszer kvadratikus stabilitására a *quadstab* paranccsal kérdezhetünk. Amennyiben a rendszer kvadratikusán stabil a program egy megfelelő kvadratikus Ljapunov-függvényt is ad. A program eredményeként a

$$V(x) = x^T \begin{pmatrix} 356.5380 & 0.6875 \\ 0.6875 & 593.4559 \end{pmatrix} x \quad (122)$$

Ljapunov-függvényt kaptuk, tehát a (120) visszacsatolt LPV rendszer kvadratikusán stabil az origóban. A kvadratikus Ljapunov-függvény létezése garantálja a 2.3.1 tétel értelmében az origó aszimptotikus stabilitását. A súrlódó rezgőrendszer hibrid modellje tehát lokálisan stabilizálható az $u(t) = 0, 4x_1(t) - 4x_2(t)$ visszacsatolással.

Megjegyezzük, hogy ezzel a programmal a paramétertől affin módon függő

$$V(x, \delta) = x^T R(\delta)x \quad (123)$$

Ljapunov-függvény is kereshető. A diplomamunka keretében paraméterfüggő Ljapunov-függvényekkel nem foglalkoztunk.

5. Összefoglalás

A diplomamunkában feladatunk olyan hibrid rendszerek stabilizálása volt, amelyek adott stacionárius pontok környezetében lokálisan linearizálhatók. A stabilizálást kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozótervezéssel valósítottuk meg.

Az 1.2. fejezetben összehasonlítottuk a kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozó-tervezés módszerét más, az irodalomból ismert szabályozási technikákkal. A matematikai alapfogalmak és tételek áttekintése után saját példákon demonstráltuk a kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozótervezést, először lineáris, majd hibrid rendszereken.

Adott kontrol Ljapunov-függvényhez stabilizáló, statikus, lineáris, teljes állapot visszacsatolást kerestünk, melynek megvan az az előnye, hogy ha a rendszer trajektóriája külső hatásra eltér a tervezettől, akkor ez a visszacsatolt függvény ehhez az új állapothoz határozza meg a megfelelő vezérlési vektort. A kontrol Ljapunov-függvényeket mi választottuk próba-hiba módszerrel. Tapasztaltuk, hogy a visszacsatolási tartományok érzékenyen függenek a választott Ljapunov-függvényektől. Az állapot visszacsatolás keresését lineáris mátrixegyenlőtlenségek megoldására vezettük vissza.

A szabályozótervezés jól (polinomiális időben) számolható MATLAB LMI Toolbox és MATHEMATICA programokkal, hiszen ha szabályozható a rendszer, akkor ezekkel a programokkal biztosan találunk megfelelő visszacsatolást. MATHEMATICA programmal a visszacsatolási paraméterek lehetséges értékeit kétdimenziós állapottér esetében grafikonon szemléltettük, az eredményül kapott visszacsatolási tartományok konvexek. Magasabb dimenziós állapotterek (három és annál több) esetében a programmal a visszacsatolási tartomány határait tudjuk meghatározni. A MATLAB LMI Toolbox programcsomag pedig egy belső célfüggvényét optimalizálva ad egy optimális visszacsatolást az állapottér tetszőleges dimenziószáma esetén.

A vizsgált példák alapján megállapíthatjuk, hogy a kontrol Ljapunov-függvény alapú szabályozótervezés hatékonyan működik szakaszonként lineáris (PWA) modellekkel leírható hibrid rendszereken illetve olyan nemlineáris és hibrid rendszereken, melyek lokális linearizálással szakaszonként lineáris rendszerekké alakíthatók. A linearizált rendszerek vizsgálata során természetesen csak lokális tulajdonságok mondhatók el az eredeti nemlineáris és hibrid rendszerekről.

Megsejtett állapot visszacsatoláshoz tudunk keresni a MATLAB LMI Toolbox programcsomag segítségével alkalmas kvadratikus kontrol Ljapunov-függvényt. A súrlódó

rezgőrendszer modelljét kiterjesztettük lineáris paraméter változós (LPV) rendszerré is, majd ehhez a rendszerhez sejtettünk meg egy visszacsatolást. Az így kapott autonóm LPV rendszerhez kerestünk a MATLAB LMI Toolbox programcsomag segítségével kvadratikusan stabil Ljapunov-függvényt. Megállapítottuk, hogy az LPV rendszer az általunk választott visszacsatolással kvadratikusan és aszimptotikusan is stabil. Ebből következtettünk az eredeti hibrid modell, a súrlódó rezgőrendszer modelljének az adott visszacsatolás melletti lokális aszimptotikus stabilitására.

A jövőben érdemes lenne vizsgálni az 1.1. fejezetben tárgyalt harmadik típusú szabályozótervezést, amikor a Ljapunov-függvényt és a visszacsatolást egyszerre keressük, ebben az esetben a problémát bilineáris mátrixegyenlőtlenség megoldására vezethetjük vissza. További kérdés, hogy vajon adott rendszerhez meg tudjuk-e adni az összes kontrol Ljapunov-függvényt úgy, hogy a zárt rendszer aszimptotikusan stabil maradjon.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék hálás köszönetet mondani témavezetőmnek, Prof. Hangos Katalinnak gondos irányításáért, önfeláldozó segítségéért és mindazért a támogatásért, amit munkám során nyújtott. Hálás vagyok konzulensemnek, Prof. Petz Dénesnek a gondos támogatásért, és Szederkényi Gábornak a lelkesítéséért és hasznos tanácsaiért.

Köszönettel tartozom az MTA SzTAKI Folyamatirányítási Kutatócsoport valamennyi tagjának a sok segítségért, ösztönzésért és biztatásért. Továbbá szeretném köszönetemet kifejezni Dr. Garay Barnabásnak az elmúlt félév során nyújtott odaadó segítségért és figyelmességéért.

Hivatkozások

- [1] J.G. VanAntwerp and R.D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10:363–385, 2000.
- [2] C. Scherer and S. Weiland. *Linear Matrix Inequalities in Control*. DISC, <http://www.er.ele.tue.nl/sweiland/lmi.pdf>, 2000.
- [3] B. De Schutter and W.P.M.H. Heemels. Modelling and control of hybrid systems (Lecture Notes of the DISC Course), 2004.

-
- [4] Prékopa András. *Lineáris Programozás I.* A Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968.
- [5] Gyurkovics Éva. Irányítási rendszerek (kurzusjegyzet). BME TTK Differenciálegyenletek Tanszék, 1999.
<http://www.math.bme.hu/~gye/OktAny.htm>.
- [6] K. M. Hangos, J. Bokor, and G. Szederkényi. *Analysis and Control of Nonlinear Process Systems.* Springer, London, 2004.
- [7] K. M. Hangos, J. Bokor, and G. Szederkényi. *Computer Controlled Systems.* Veszprémi Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2002.
- [8] T. Coleman, M. A. Branch, and A. Grace. Optimization toolbox version 2.3 (r13sp1). The Math Works, Inc. Natick. MA, 2003.
- [9] J. La Salle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's Direct Method.* Academic Press, New York, London, 1961.
- [10] N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy. *Stability Theory by Liapunov's Direct Method.* Springer-Verlag, New York, 1977.
- [11] F. Borelli. *Discrete Time Constrained Optimal Control.* PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2002.
- [12] A. Bemporad and M. Morari. Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica*, 35:407–427, 1999.
- [13] Hangos Katalin. Modern irányításelmélet II. (kurzusjegyzet). MTA-SZTAKI, 2005.
http://daedalus.scl.sztaki.hu/PCRG/education/bme/IrElm2_05.html.
- [14] M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems: A Computational Approach.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [15] Hangos Katalin. A nemlineáris rendszer- és irányításelmélet alapjai (kurzusjegyzet). MTA-SZTAKI, 2004.
http://daedalus.scl.sztaki.hu/PCRG/members/hangos/oktatas/nemlinrsz_04.html.
- [16] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory.* SIAM, Philadelphia, 1994.

- [17] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox For Use with Matlab*. The MathWorks, Inc., Natick, MA, 1995.